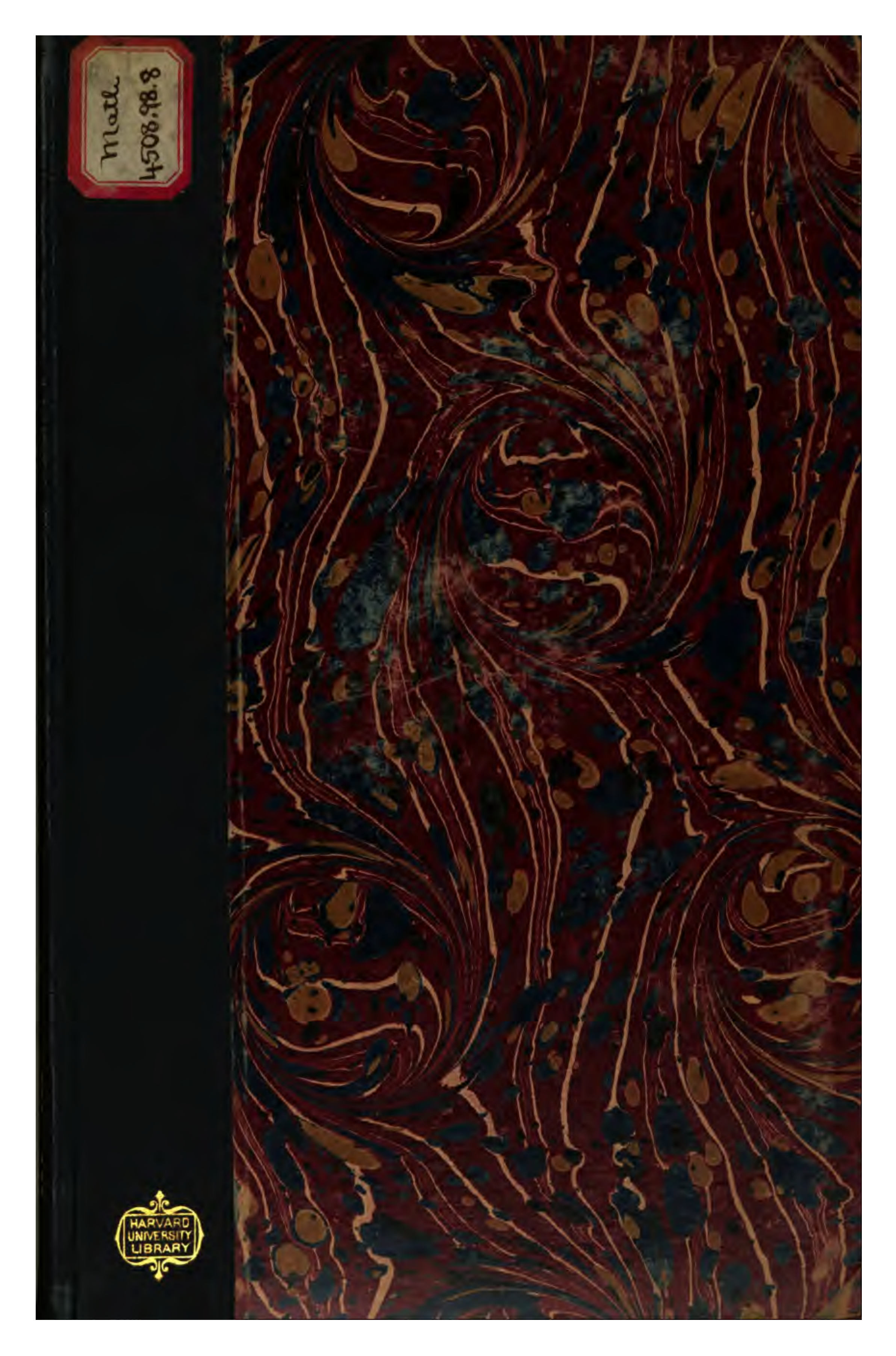
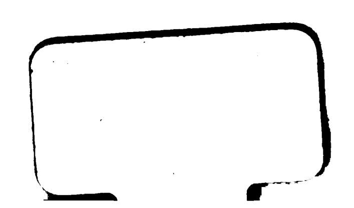

Math 4508.98.8
HARVARD UNIVERSITY LIBRARY


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
ET
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE



ÜBER EINE KATEGORIE

VON

TRANSFORMATIONSGRUPPEN

EINER

VIERDIMENSIONALEN MANNIGFALTIGKEIT.

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOCTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU LEIPZIG

VORGELEGT VON

GERHARD KOWALEWSKI.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1898.

G. Kowalewski in Leipzig: *Ueber eine Kategorie von Transformationsgruppen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit.*

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem erledigt, alle Transformationsgruppen des vierdimensionalen Raumes zu bestimmen, bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante, dagegen mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben, womit gemeint ist, dass die Invarianten von mehr als zwei Punkten sich durch Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen. Dabei ist es unser eigentlicher Zweck, alle reellen Gruppen mit der angegebenen Eigenschaft zu ermitteln. Es wird sich ergeben, dass diese reellen Gruppen sich sämmtlich durch reelle Punkttransformation auf neun Typen zurückführen lassen, von denen sieben projectiv sind.

Lie[1]) hat das entsprechende Problem im dreidimensionalen Raume behandelt und seine Resultate u. A. zu einer Kritik der bekannten Helmholtzschen Arbeit „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“[2]) verwerthet. An einer Stelle werden wir ebenfalls auf diese Helmholtzsche Arbeit zu sprechen kommen.

Zum Schluss wird dasselbe Problem, allerdings ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse, für den fünfdimensionalen Raum erledigt, aber unter Beschränkung auf imprimitive Gruppen, da eine Bestimmung der primitiven Gruppen des fünfdimensionalen Raumes noch nicht ausgeführt worden ist. Ueberall werden wir die im Laufe dieser Arbeit aufgestellten Sätze nach Möglichkeit auf den n-dimensionalen Raum zu übertragen suchen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Gruppen des n-dimensionalen Raumes, bei denen zwei Punkte eine und nur eine, dagegen mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

Zunächst müssen wir, um uns im Folgenden darauf berufen zu können, gewisse Eigenschaften der endlichen continuirlichen

1) Leipziger Berichte, 1886, S. 337 ff.

2) Göttinger Nachrichten, 1868, S. 193—221.

Gruppen entwickeln, die überall in Betracht kommen, wo es sich um Invarianten von Punkten handelt.

Wir betrachten eine endliche continuirliche Gruppe, die durch ihre infinitesimalen Transformationen

$$(1)\quad X_k f = \xi_{k1}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{kn}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$(k = 1, \cdots, r)$$

gegeben sei. Dabei setzen wir, wie es gewöhnlich geschieht, voraus, dass die Functionen ξ_{ki} innerhalb eines gewissen Bereiches des R_n (auf den wir uns immer beschränken wollen) regulär, d. h. an jeder Stelle $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ desselben in gewöhnliche Potenzreihen nach den Differenzen $x_i - x_i^0$ entwickelbar seien. Wenn dann in der Matrix $|\xi_{ki}|$ alle $(m+1)$-reihigen, nicht aber alle m-reihigen Determinanten identisch verschwinden, so wollen wir sagen, zu dieser Matrix oder auch zu der Gruppe (1) gehöre die Zahl m, oder m sei ihre zugehörige Zahl. Als Punkt allgemeiner Lage gegenüber der Gruppe (1) wird ein Punkt bezeichnet, für den in der Matrix $|\xi_{ki}|$ nicht alle m-reihigen Determinanten verschwinden. Ein solcher Punkt kann offenbar innerhalb eines gewissen Bereiches beliebig variiren ohne seinen Charakter als Punkt allgemeiner Lage zu verlieren, während in beliebiger Nähe eines Punktes, der nicht von allgemeiner Lage ist, schon Punkte von allgemeiner Lage vorhanden sind.

Hält man nun einen Punkt $(x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)})$, der von allgemeiner Lage gegenüber der Gruppe (1) ist, fest, so gelangt man zu einer $(r-m)$-gliedrigen Untergruppe von (1). Gegenüber dieser Untergruppe sei $(x_1^{(2)} \cdots x_n^{(2)})$ ein Punkt von allgemeiner Lage. Wird auch er festgehalten, so erhält man eine $(r-m-m_1)$-gliedrige Untergruppe der erwähnten $(r-m)$-gliedrigen, wenn m_1 deren zugehörige Zahl bedeutet. Dieser Process lässt sich offenbar so lange wiederholen, bis keine infinitesimale Transformation mehr übrig bleibt, was nach s-maliger Wiederholung eintreten möge. $(s \leqq r.)$ Wir haben dann eine Reihe von Punkten

$$(2)\qquad x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)}),\quad (x_1^{(2)} \cdots x_n^{(2)}),\quad \cdots,\quad (x_1^{(s)} \cdots x_n^{(s)}),$$

wo immer $(x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)})$ von allgemeiner Lage ist gegenüber derjenigen Untergruppe von (1), bei welcher die vorhergehenden Punkte in Ruhe bleiben, also der erste Punkt von allgemeiner

Lage gegenüber der ganzen Gruppe. Damit verbunden ist eine Reihe von Zahlen

$$m, m_1, m_2, \cdots, m_{s-1},$$

in welcher m_i die zugehörige Zahl der eben bezeichneten Untergruppe darstellt. Diese Zahlen sind offenbar sämmtlich von Null verschieden und ihre Summe

$$m + m_1 + \cdots + m_{s-1} = r.$$

Man übersieht leicht, dass sie ganz unabhängig von der speciellen Wahl der Punkte $(x_1^{(i)} \ldots x_n^{(i)})$ sind, wenn nur die erwähnte Eigenschaft der Reihe (2) bestehen bleibt. Ferner folgt aus der Stetigkeit der Functionen ξ_{ki}, dass jeder Punkt der Reihe (2) sich innerhalb eines gewissen Bereiches beliebig bewegen kann, ohne dass jene Eigenschaft aufgehoben wird.

Unter Benutzung dieser Thatsache ist es leicht, die zugehörige Zahl M_q der Gruppe in $n \cdot q$ Veränderlichen

$$(3) \qquad X_k^{(1)}f + X_k^{(2)}f + \cdots + X_k^{(q)}f \quad (k = 1, \cdots, r)$$

zu bestimmen, wo

$$X_k^{(i)}f = \xi_{k1}(x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)}) \frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + \cdots + \xi_{kn}(x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)}) \frac{\partial f}{\partial x_n^{(i)}}$$

$$(i = 1, \cdots, q)$$

sein soll. (Die Punkte $(x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)})$ sind hier also als variabel zu betrachten und nicht mit den Punkten der Reihe (2) zu verwechseln.) Wir beweisen nämlich die Gleichung

$$M_q = m + m_1 + \cdots + m_{q-1}.$$

Halten wir bei der Gruppe (1) die q ersten Punkte der Reihe (2) fest, so wissen wir, dass dann eine Untergruppe von (1) mit $r - (m + m_1 + \cdots + m_{q-1})$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen übrig bleibt. Den festgehaltenen q Punkten entspricht in dem nq-dimensionalen Raume der Gruppe (3) ein einziger festgehaltener Punkt, und offenbar muss dabei auch von (3) gerade eine $(r - m - m_1 - \cdots - m_{q-1})$-gliedrige Untergruppe übrig bleiben. Das geschieht aber dann und nur dann, wenn für diesen Punkt in der Matrix von (3) eine $(m + m_1 + \cdots + m_{q-1})$-reihige Determinante nicht verschwindet, während alle mehrreihigen Determinanten verschwinden. Weil nun, wie oben bemerkt wurde, die festgehaltenen q Punkte innerhalb gewisser Bereiche beliebig variiren können, ohne dass die

Zahlen m, m_1, $\ldots$, m_{q-1} sich ändern, so darf also auch der ihnen entsprechende Punkt des nq-dimensionalen Raumes der Gruppe (3) in einem gewissen Bereiche beliebig variiren, ohne dass die mehr als $(m + m_1 + \cdots + m_{q-1})$-reihigen Determinanten ihrer Matrix aufhören für diesen Punkt zu verschwinden. Daraus folgt aber, dass sie identisch verschwinden, und es ist in der That

$$M_q = m + m_1 + \cdots + m_{q-1}.$$

Für $q = s$ ergiebt sich insbesondere $M_q = r$, und diese Gleichung gilt auch für $q > s$.

Nennen wir ein System von q Punkten, für welches in der Matrix von (3) nicht alle M_q-reihigen Determinanten verschwinden, ein allgemeines Punktsystem bei der Gruppe (1), so können wir sagen:

Eine Reihe von Punkten (2), in welcher jeder Punkt von allgemeiner Lage gegenüber derjenigen Untergruppe von (1) ist, welche die vorhergehenden Punkte invariant lässt, hat die Eigenschaft, dass immer $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $\cdots$, $x^{(q)}$ $(q = 1, 2, \cdots, s)$ ein allgemeines Punktsystem gegenüber der Gruppe (1) bilden. Man überzeugt sich leicht, dass auch umgekehrt ein Punkt $x^{(q)}$, der mit den $q - 1$ ersten Punkten der Reihe (2) ein allgemeines Punktsystem gegenüber der Gruppe (1) bilden soll, von allgemeiner Lage sein muss gegenüber derjenigen Untergruppe von (1), welche jene $q - 1$ Punkte in Ruhe lässt.

Die Zahlen m, m_1, $\cdots$, m_{s-1} stehen in engem Zusammenhang mit der Anzahl der Invarianten, welche q Punkte bei der Gruppe (1) besitzen. Diese Invarianten sind nämlich definirt als die Lösungen des vollständigen Systems:

$$X_k^{(1)}f + X_k^{(2)}f + \cdots + X_k^{(q)}f = 0 \quad (k = 1, \cdots, r).$$

Dasselbe enthält aber gerade M_q unabhängige Gleichungen, da in der Matrix alle $(M_q + 1)$-reihigen, nicht aber alle M_q-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Die Zahl der unabhängigen Lösungen ist mithin $nq - M_q$, und dies ist zugleich die Anzahl der Invarianten von q Punkten. Für $q \geq s$ Punkte giebt es also z. B. $nq - r$ Invarianten. Wächst q noch weiter um eine Einheit, so nimmt die Zahl der Invarianten um n zu.

Inbetreff der Zahl s bemerken wir noch Folgendes: s ist die Minimalzahl von Punkten, die man bei der Gruppe (1) festhalten

muss, damit alles in Ruhe bleibe. In der That bleibt nach Festhaltung einer gewissen Anzahl q von Punkten alles in Ruhe oder nicht, je nachdem in der Matrix von (3) eine r-reihige Determinante für diese Punkte von Null verschieden ist oder nicht. Das erstere kann aber erst für $q = s$ eintreten, da für $q < s$ $M_q = m + m_1 + \cdots + m_{q-1}$ stets kleiner als r ist und in jener Matrix, wie wir wissen, alle $(M_q + 1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden. s lässt sich also auch definiren als die kleinste Zahl, für welche in der Matrix von

$$X_k^{(1)}f + X_k^{(2)}f + \cdots + X_k^{(s)}f \quad (k = 1, \cdots, r)$$

eine r-reihige, nicht identisch verschwindende Determinante vorkommt.

Wir betrachten nach diesen Vorbereitungen ein allgemeines Punktsystem $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)}$ gegenüber der Gruppe (1). Ein solches ist, weil für dasselbe in der Matrix von (3) nicht alle M_q-reihigen Determinanten verschwinden, in seinen Bewegungen bei der Gruppe (1) nur dadurch beschränkt, dass die $nq - M_q$ Invarianten der q Punkte constant bleiben müssen. Sind

$$J_k(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)}) \quad (k = 1, \cdots, nq - M_q)$$

diese Invarianten, so kann das Punktsystem durch Transformationen der Gruppe (1) in alle Lagen $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{x}^{(q)}$ in einer gewissen Nähe seiner Anfangslage übergeführt werden, für welche die Gleichungen

$$J_k(\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{x}^{(q)}) = J_k(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)})$$
$$(k = 1, \cdots, nq - M_q)$$

erfüllt sind.[1]

Nehmen wir nunmehr an, die Gruppe (1) sei so beschaffen, dass bei ihr zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, während sich die Invarianten von mehr als zwei Punkten durch solche von Punktepaaren ausdrücken lassen. Dann hat das vollständige System

$$X_k f + X_k^{(1)} f = 0 \quad (k = 1, \cdots, r)$$

eine und nur eine Lösung, die wir kurz mit $J(x, x^{(1)})$ bezeichnen wollen. Dagegen drücken sich die Lösungen von

---

1) Inbetreff des Beweises verweisen wir auf Lie, Transformationsgruppen, I, Cap. 13.

(4) $X_k f + X_k^{(1)} f + \cdots + X_k^{(q)} f = 0 \quad (k = 1, \cdots, r)$

aus durch die Functionen

$$J(x, x^{(j)}), \quad J(x^{(i)}, x^{(j)}) \quad (i, j = 1, \cdots, q).$$

Wenn wir nun $q = s$ annehmen, wo s die früher auseinandergesetzte Bedeutung hat, und ein Punktsystem

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)}$$

wählen, welches ein allgemeines gegenüber der Gruppe (1) ist, so werden die Bewegungen der Punkte

$$x, x^{(1)}, \cdots, x^{(q)},$$

wobei x ein beliebiger Punkt ist, nur an die Constanz der Invarianten $J(x, x^{(j)})$, $J(x^{(i)}, x^{(j)})$ gebunden sein. Dies folgt daraus, dass in der Matrix von (4) für diese Punkte eine r-reihige nicht verschwindende Determinante vorkommt. Halten wir jetzt die Punkte $x^{(1)}, \cdots, x^{(s)}$ fest, so kann, da die Invarianten $J(x^{(i)}, x^{(j)})$ von selbst constant bleiben, der Punkt x durch Transformationen der Gruppe in alle Lagen $\mathfrak{x}$ in gewisser Nähe der Anfangslage übergeführt werden, für welche die Gleichungen

(5) $J(\mathfrak{x}, x^{(j)}) = J(x, x^{(j)}) \quad (j = 1, \cdots, s)$

erfüllt sind. Andererseits liegt es in der Definition der Zahl s, dass nach Festhaltung der s Punkte eines allgemeinen Punktsystems auch alle anderen Punkte in Ruhe bleiben. Daher sind die Gleichungen (5) so beschaffen, dass sie in der Nähe von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nur die einzige Lösung

$$\mathfrak{x}_1 = x_1, \ \mathfrak{x}_2 = x_2, \cdots, \mathfrak{x}_n = x_n$$

besitzen. Unter den Gleichungen (5) sind also sicher n unabhängige. Da es auf die Numerirung der Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(s)}$ nicht ankommt, können wir annehmen, dass die n ersten Gleichungen unabhängig seien. Wäre nun $s > n$, so würde schon nach Festhaltung der Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$, deren Anzahl kleiner als s ist, alles in Ruhe bleiben. Das widerspricht aber der Bedeutung von s. Es ist also $s = n$.

Wir wollen jetzt bei der Gruppe (1) die Zahlen $m, m_1, \cdots, m_{s-1}$ wirklich bestimmen. Zunächst ist die Gruppe offenbar transitiv. Wäre sie nämlich intransitiv, so gäbe es schon für einen Punkt wenigstens eine Invariante, zwei Punkte hätten also wenigstens zwei voneinander unabhängige Invarianten. Daraus geht hervor, dass $m = n$ ist. Wie wir früher gesehen haben, lässt sich eine

Reihe von n (da $s = n$ ist) Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ bilden derart, dass jeder Punkt derselben von allgemeiner Lage ist gegenüber derjenigen Untergruppe von (1), bei welcher die vorhergehenden Punkte in Ruhe bleiben. Wir haben gezeigt, dass bei beliebigem Werth von q die q ersten Punkte einer solchen Reihe ein allgemeines Punktsystem gegenüber der Gruppe (1) bilden, und dass ein Punkt x dann und nur dann mit den Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)}$ ein allgemeines Punktsystem bildet, wenn er von allgemeiner Lage ist gegenüber derjenigen Untergruppe von (1), welche $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)}$ invariant lässt. Wählen wir nun (unter der Voraussetzung $q < n$) einen solchen Punkt x, so wird er nach Festhaltung der Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(q)}$ bei den Transformationen der Gruppe noch in alle Lagen $\mathfrak{x}$ übergehen können, die in gewisser Nähe der Anfangslage sind und den Gleichungen

$$(6) \qquad J(\mathfrak{x}, x^{(j)}) = J(x, x^{(j)}) \quad (j = 1, \cdots, q)$$

genügen. Diese Gleichungen sind, wie wir jetzt zeigen wollen, voneinander unabhängig. Wären sie es nämlich nicht, so gäbe es auch unter den Gleichungen

$$J(\mathfrak{x}, x^{(j)}) = J(x, x^{(j)}) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

weniger als n unabhängige, d. h. nach Festhaltung der Punkte $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ wäre der Punkt x noch beweglich. Weil aber diese Punkte ein allgemeines Punktsystem bilden und, wie wir gefunden haben, $s = n$ ist, so ist dies ausgeschlossen. In der That sind also die Gleichungen (6) voneinander unabhängig, d. h. nach Festhaltung eines allgemeinen Punktsystems von q Punkten kann jeder Punkt x noch in ∞^{n-q} Lagen übergehen, falls er von allgemeiner Lage gegenüber derjenigen Untergruppe von (1) ist, bei welcher jene q Punkte in Ruhe bleiben. Die Zahl m_q, deren Bedeutung oben erklärt wurde, lässt sich nun auch dadurch definiren, dass nach Festhaltung eines allgemeinen Punktsystems von q Punkten jeder andre Punkt im allgemeinen in ∞^{m_q} Lagen übergehen kann. Unter Benutzung dieses Umstandes erhalten wir in unserem Falle $m_q = n - q$. Aus der Gleichung

$$r = m + m_1 + \cdots + m_{n-1}$$

ergiebt sich ferner

$$r = n + n - 1 + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dieses Resultat formuliren wir als

Satz 1. Die Gruppen des n-dimensionalen Raumes, bei welchen zwei Punkte eine und nur eine, mehr als zwei Punkte aber keine wesentliche Invariante haben, sind $\frac{n(n+1)}{2}$-gliedrige transitive Gruppen.

Das Ergebniss, dass $m_1 = n - 1$ ist, drücken wir in folgender Weise aus als

Satz 2. Ist $Y_1 f$, $Y_2 f$, $\cdots$, $Y_{\frac{(n-1)n}{2}} f$ diejenige Untergruppe, bei welcher ein Punkt von allgemeiner Lage in Ruhe bleibt, so verschwinden in ihrer Matrix alle n-reihigen Determinanten identisch, nicht aber alle $(n-1)$-reihigen.

Diese Eigenschaft ist, wie man sich leicht überzeugt, nothwendig und hinreichend, damit bei einer Gruppe, die dem Satz 1 genügt, zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben.

Ist $\bar{x}$ der Punkt, welcher bei der Gruppe $Y_i f \left(i = 1, \cdots, \frac{(n-1)n}{2}\right)$ invariant bleibt, so hat das vollständige System $Y_i f = 0$ wegen Satz 2 die einzige Lösung $J(x, \bar{x})$. Enthält diese etwa die Variable x_n wirklich, so können wir $x_1, \cdots, x_{n-1}, J$ als neue Veränderliche einführen. Dadurch wird

$$Y_i f = \eta_{i1}(x_1 \cdots x_{n-1}, J) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots$$

$$\cdots + \eta_{i, n-1}(x_1 \cdots x_{n-1}, J) \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}.$$

Diese Gruppe lässt sich als eine Gruppe in $n - 1$ Veränderlichen ansehen, indem J als Parameter betrachtet wird. Sie giebt an, wie die Punkte der Mannigfaltigkeit $J(x, \bar{x}) = J$ bei der Gruppe $Y_i f$ transformirt werden, und ist wegen Satz 2 transitiv.

Betrachten wir $Y_i f$ wieder als Gruppe in den n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, J$, so wissen wir, dass, da $m_2 = n - 2$ ist, in der Matrix einer Untergruppe von $Y_i f$, bei der ein Punkt von allgemeiner Lage (gegenüber $Y_i f$) $x_1', \cdots, x'_{n-1}, J'$ invariant bleibt, alle $(n-1)$-reihigen, nicht aber alle $(n-2)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Setzen wir in dieser Matrix $J = J'$, so werden nach wie vor alle $(n-1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Ob aber noch eine $(n-2)$-reihige Determinante vorhanden ist, die nicht identisch

verschwindet, ist auf diesem Wege nicht unmittelbar einzusehen, und darauf wollen wir auch nicht näher eingehen, da wir es im Folgenden thatsächlich nicht brauchen werden. Es genügt vielmehr für das Folgende, zu wissen, dass nach der Substitution $J = J'$ nach wie vor alle $(n-1)$-reihigen Determinanten in jener Untergruppe von $Y_i f$ identisch verschwinden. Denn daraus folgt, dass bei der Gruppe in $n-1$ Veränderlichen

$$Y_i f = \eta_{i1}(x_1 \cdots x_{n-1}, J')\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots$$
$$\cdots + \eta_{i,n-1}x_1 \cdots x_{n-1}, J')\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$$

zwei Punkte $(x_1 \cdots x_{n-1})$ und $(x_1^{(1)} \cdots x_{n-1}^{(1)})$ sicher eine Invariante haben. Setzen wir nämlich

$$Y_i^{(1)} f = \eta_{i1}(x_1^{(1)} \cdots x_{n-1}^{(1)}, J')\frac{\partial f}{\partial x_1^{(1)}} + \cdots$$
$$\cdots + \eta_{i,n-1}(x_1^{(1)} \cdots x_{n-1}^{(1)}, J')\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}^{(1)}},$$

so hat nach früher angestellten Betrachtungen das vollständige System

$$Y_i f + Y_i^{(1)} f = 0 \quad \left(i = 1, \cdots, \frac{(n-1)n}{2}\right)$$

$\mu + \mu_1$ Lösungen, wobei μ, μ_1 eine analoge Bedeutung haben wie früher m, m_1. Es ist nun aber $\mu = n - 1$, und μ_1 sicher kleiner als $n-1$, also giebt es in dem vollständigen System höchstens $2n-3$ unabhängige Gleichungen und, da die Zahl der Veränderlichen $2n-2$ ist, wenigstens eine Lösung. Zwei Punkte einer Mannigfaltigkeit $J(x, \bar{x}) = \text{Const.}$ haben also bei der Gruppe $Y_i f$ in der That sicher eine Invariante. Diese Thatsache formuliren wir als

Satz 3. Hält man bei der Gruppe $X_k f$ einen Punkt von allgemeiner Lage fest, $(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)$, so zerlegt sich der ganze Raum in ∞^1 $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $J(x, \bar{x}) = \text{Const.}$, die einzeln invariant bleiben. Die Punkte einer solchen Mannigfaltigkeit werden im allgemeinen (für specielle Werthe von Const. können Ausnahmen eintreten) durch eine Gruppe in $n-1$ Veränderlichen transformirt, die transitiv ist und bei der zwei Punkte sicher eine Invariante haben.

Wir haben früher gesehen, dass die Gleichungen

$$J(\mathfrak{x}, x^{(j)}) = J(x, x^{(j)}) \quad (j = 1, \cdots, n),$$

wenn die Punkte $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ ein allgemeines Punktsystem bei der Gruppe $X_k f$ bilden, in der Nähe von $x_1, \cdots x_n$ nur das Lösungssystem

$$\mathfrak{x}_1 = x_1, \mathfrak{x}_2 = x_2, \cdots \mathfrak{x}_n = x_n$$

zulassen. Hieraus können wir die wichtige Folgerung ziehen, dass die Function $J(x, \bar{x})$ keiner von den $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ freien linearen partiellen Differentialgleichung genügt von der Form

$$\alpha_1(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Sonst nämlich müssten die Integralmannigfaltigkeiten

$$J(\mathfrak{x}, x^{(j)}) = J(x, x^{(j)}) \quad (j = 1, \cdots, n),$$

welche durch den Punkt x hindurchgehen, auch das durch denselben hindurchgehende Linienelement

$$dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n = \alpha_1(x_1 \cdots x_n) : \alpha_2(x_1 \cdots x_n) : \cdots : \alpha_n(x_1 \cdots x_n)$$

enthalten. Das ist aber nicht der Fall, weil, wie wir gesehen haben, diese n Mannigfaltigkeiten in der Nähe des Punktes x keinen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Hieran schliesst sich eine ganze Reihe von Sätzen über die Gruppe $X_k f$.

Zunächst ist es leicht, zu zeigen, dass keine zwei infinitesimalen Transformationen der Gruppe dieselben Bahncurven haben. Wäre nämlich etwa $X_2 f = \varphi(x_1 \cdots x_n) X_1 f$, so müsste die Invariante $J(x, x^{(1)})$ die beiden Gleichungen erfüllen:

$$X_1 f + X_1^{(1)} f = 0$$
$$\varphi X_1 f + \varphi^{(1)} X_1^{(1)} f = 0,$$

wobei $\varphi^{(1)} = \varphi(x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)})$ sein soll. Da nun $J(x, x^{(1)})$ nicht der Gleichung $X_1 f = 0$ genügen kann, welche frei von $x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$ ist, so würde folgen, dass $\varphi^{(1)} - \varphi = 0$ wäre, was nur für $\varphi = \text{Const.}$ möglich ist. Dann aber wären $X_1 f$, $X_2 f$ nicht zwei wesentlich verschiedene infinitesimale Transformationen. Für $n = 3$ ist dieser Satz von Lie in der am Anfang citirten Arbeit bewiesen worden.

Es giebt aber noch eine ganze Reihe analoger Sätze, die für den dreidimensionalen Raum von nicht so wesentlicher Bedeutung sind, aber in höheren Räumen, wie sich später im Falle des vier- und des fünfdimensionalen Raumes bestätigen wird, sich als sehr nützlich erweisen.

Betrachtet man zunächst vier infinitesimale Transformationen von $X_k f$, so lässt sich zeigen, dass in ihrer Matrix nicht alle dreireihigen Determinanten verschwinden. Sonst beständen nämlich zwischen den infinitesimalen Transformationen, die wir mit $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ bezeichnen wollen, zwei lineare Relationen von der Form:

$$X_3 f = \varphi_1(x_1 \cdots x_n) X_1 f + \varphi_2(x_1 \cdots x_n) X_2 f$$

$$X_4 f = \psi_1(x_1 \cdots x_n) X_1 f + \psi_2(x_1 \cdots x_n) X_2 f.$$

Dass die Relationen sich so schreiben lassen, beruht darauf, dass nach dem soeben bewiesenen Satze zwischen $X_1 f$ und $X_2 f$ keine lineare Relation bestehen darf. Die Invariante $J(x,\ x^{(1)})$ müsste nun die Gleichungen

$$X_1 f + X_1^{(1)} f = 0$$

$$X_2 f + X_2^{(1)} f = 0$$

$$X_3 f + X_3^{(1)} f = \varphi_1 X_1 f + \varphi_2 X_2 f + \varphi_1^{(1)} X_1^{(1)} f + \varphi_2^{(1)} X_2^{(1)} f = 0$$

$$X_4 f + X_4^{(1)} f = \psi_1 X_1 f + \psi_2 X_2 f + \psi_1^{(1)} X_1^{(1)} f + \psi_2^{(1)} X_2^{(1)} f = 0$$

erfüllen, mithin auch die beiden folgenden:

$$X_3 f - \varphi_1^{(1)} X_1 f - \varphi_2^{(1)} X_2 f = (\varphi_1 - \varphi_1^{(1)}) X_1 f + (\varphi_2 - \varphi_2^{(1)}) X_2 f = 0$$

$$X_4 f - \psi_1^{(1)} X_1 f - \psi_2^{(1)} X_2 f = (\psi_1 - \psi_1^{(1)}) X_1 f + (\psi_2 - \psi_2^{(1)}) X_2 f = 0.$$

Da aber für $f = J(x,\ x^{(1)})$ $X_1 f \neq 0$ ist, so würde folgen, dass die Determinante

$$(\varphi_1 - \varphi_1^{(1)})\ (\psi_2 - \psi_2^{(1)}) - (\varphi_2 - \varphi_2^{(1)})\ (\psi_1 - \psi_1^{(1)})$$

identisch verschwindet. Das würde jedoch bedeuten, dass eine lineare Relation zwischen

$$X_3 f - \varphi_1^{(1)} X_1 f - \varphi_2^{(1)} X_2 f \quad \text{und} \quad X_4 f - \psi_1^{(1)} X_1 f - \psi_2^{(1)} X_2 f$$

bestände. Dies sind aber offenbar zwei infinitesimale Transformationen unserer Gruppe, und sie würden also dieselben Bahncurven haben, was wir bereits als unmöglich erkannt haben.

Ebenso leicht liesse sich der folgende Satz beweisen: In der Matrix von sieben infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_k f$ dürfen nicht alle vierreihigen Determinanten verschwinden.

Wir wollen aber gleich zum Beweise des allgemeinen Satzes übergehen, der allen diesen einzelnen Fällen zu Grunde liegt. Dieser allgemeine Satz lässt sich so aussprechen:

Satz 4. In der Matrix von $\frac{m(m+1)}{2}+1$ infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_k f$ dürfen nicht alle $(m+1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden.

Für $m=1$ ist der Satz richtig. Denn in der Matrix von zwei infinitesimalen Transformationen der Gruppe dürfen in der That nicht alle zweireihigen Determinanten verschwinden, weil sonst die beiden infinitesimalen Transformationen dieselben Bahncurven hätten. Auch für $m=2$ haben wir den Satz bereits bewiesen. Es liegt daher nahe, einen Schluss von $m-1$ auf m anzuwenden. Angenommen, der Satz wäre richtig für den Fall $m-1$. Wäre er dann nicht auch für den Fall m richtig, so würden also in der Matrix von $\frac{m(m+1)}{2}+1$ infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe, die wir mit

$$X_1 f,\ X_2 f,\ \cdots,\ X_{\frac{m(m+1)}{2}+1} f$$

bezeichnen wollen, alle $(m+1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, dagegen nicht alle m-reihigen, weil wir eben die Richtigkeit unseres Satzes für den Fall $m-1$ voraussetzen. Nehmen wir nun an (was durch geeignete Numerirung der infinitesimalen Transformationen immer erreicht werden kann), dass in der Matrix von $X_1 f$, $X_2 f$, $\cdots$, $X_m f$ eine solche nicht verschwindende m-reihige Determinante vorhanden sei. Dann beständen wegen des Verschwindens aller $(m+1)$-reihigen Determinanten $\frac{m(m+1)}{2}+1-m=\frac{(m-1)m}{2}+1$ Relationen von der Form:

$$X_{m+j} f = \sum_1^m{}_i\, \varphi_{ji}(x_1 \cdots x_n)\, X_i f \qquad \left(j=1,\ \cdots,\ \frac{(m-1)m}{2}+1\right).$$

Die Gleichungen

$$X_i f + X_i^{(1)} f = 0 \quad (i=1,\ \cdots,\ m)$$

$$X_{m+j} f + X_{m+j}^{(1)} f = 0 \quad \left(j=1,\ \cdots,\ \frac{(m-1)m}{2}+1\right),$$

welchen die Invariante $J(x,\ x^{(1)})$ genügen muss, liessen sich unter Benutzung dieser Relationen durch die folgenden ersetzen:

$$X_i f + X_i^{(1)} f = 0$$

$$X_{m+j}f - \sum_1^m{}^i \varphi_{ji}(x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)})\; X_i f$$

$$= \sum_1^m{}^i [\varphi_{ji}(x_1 \cdots x_n) - \varphi_{ji}(x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)})]\; X_i f = 0.$$

Da aber für $f = J$ $X_i f \neq 0$ ist, weil in $X_i f$ $x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$ nicht vorkommen, so folgt, dass in der Matrix

$$|\, \varphi_{ji}(x_1 \cdots x_n) - \varphi_{ji}(x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)}) \,|$$

alle m-reihigen Determinanten verschwinden. Dasselbe würde dann auch in der Matrix der $\frac{(m-1)m}{2} + 1$ Ausdrücke

$$X_{m+j}f - \sum_1^m{}^i \varphi_{ji}(x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)})\, X_i f,$$

welche nichts anderes als infinitesimale Transformationen unserer Gruppe sind (und zwar wesentlich verschiedene), stattfinden. Das haben wir aber gerade ausgeschlossen durch die Annahme, dass der zu beweisende Satz für den Fall $m - 1$ richtig sei.

Wir werden nun im nächsten Abschnitt die Gruppen, bei welchen zwei Punkte eine und nur eine, dagegen mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben, im vierdimensionalen und zum Schluss theilweise auch im fünfdimensionalen Raum wirklich bestimmen, und zwar im vierdimensionalen Raum auch für den Fall, dass man sich auf reelle Gruppen beschränkt. Zunächst werden wir aber das Problem ganz allgemein in Angriff nehmen, indem wir für die auftretenden Grössen auch complexe Werthe zulassen. Das Verfahren ist ähnlich dem von Lie im dreidimensionalen Raum angewandten. Wir suchen zuerst alle $\frac{n(n+1)}{2}$-gliedrigen transitiven Gruppen (für $n = 4$ und $n = 5$), bei denen Satz 2 und Satz 4 erfüllt sind. Einmal werden wir auch die Untergruppe $Y_i f$, bei welcher ein Punkt von allgemeiner Lage in Ruhe bleibt, daraufhin prüfen, ob sie den Satz 3 erfüllt.

Weil die Gruppen, die wir so finden, transitiv sind und den Satz 2 erfüllen, so haben bei ihnen zwei Punkte eine und nur eine Invariante. Haben wir diese Invariante bestimmt, so brauchen wir nur zu untersuchen, ob sie so beschaffen ist, dass die Gleichungen

(7) $$J(\mathfrak{x}, x^{(j)}) = J(x, x^{(j)}) \quad (j = 1, \cdots, n),$$

wenn die Punkte $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ ein allgemeines Punktsystem bilden, in der Nähe von $x_1, \cdots, x_n$ nur die eine Lösung $\mathfrak{x}_1 = x_1, \cdots, \mathfrak{x}_n = x_n$ besitzen. Zu diesem Zwecke genügt es, die Functionaldeterminante der n Functionen $J(x, x^{(j)})$ nach den $x_1, \cdots, x_n$ zu bilden und sich zu überzeugen, ob sie identisch verschwindet oder nicht. Es ist leicht einzusehen, dass jene Eigenschaft der Gleichungen (7) hinreichend ist, damit mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben. In der That haben wir früher unter alleiniger Benutzung dieser Eigenschaft die Zahlen $m_q (q = 1, \cdots, n-1)$ bestimmt. Da nun unter den Gleichungen

$$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \cdots + X_k^{(q)} f = 0 \quad \left(k = 1, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

gerade $M_q = m_1 + m_2 + \cdots + m_{q-1} = \frac{q(2n-q+1)}{2}$ unabhängige sind, so giebt es für q Punkte genau $\frac{q(q-1)}{2}$ Invarianten. Dies gilt jedoch nur für $q \leqq n$. Aber $\frac{q(q-1)}{2}$ Invarianten kennen wir bereits. Es sind die Functionen $J(x^{(i)}, x^{(j)})$ $(i, j = 1, \cdots, q)$. Es fragt sich nur noch, ob sie voneinander unabhängig sind. Das ist nun in der That der Fall, wenn die Gleichungen (7) die erwähnte Eigenschaft haben. Bestände nämlich zwischen den $J(x^{(i)}, x^{(j)})$ eine Relation, so liesse sich dieselbe etwa nach $J(x^{(\varrho)}, x^{(\sigma)})$ auflösen. Betrachtete man alle übrigen Punkte ausser $x^{(\varrho)}$ als constant, so hätte man eine Relation zwischen $J(x^{(\varrho)}, x^{(1)}), \cdots, J(x^{(\varrho)}, x^{(q)})$ vor sich. Eine solche würde aber bedeuten, dass die q ersten der Gleichungen (7) nicht voneinander unabhängig wären. Lassen wir q über n hinaus wachsen, so kommen, wie wir wissen, bei jedem Schritt n Invarianten hinzu. Diese werden aber offenbar geliefert durcht die n Functionen:

$$J(x^{(1)}, x^{(q)}), J(x^{(2)}, x^{(q)}), \cdots, J(x^{(n)}, x^{(q)}),$$

die sowohl von den $J(x^{(i)}, x^{(j)})$ $(i, j = 1, \cdots, n < q)$ als auch untereinander unabhängig sind, das letztere wiederum wegen jener Eigenschaft der Gleichungen (7).

Damit ist thatsächlich gezeigt, dass wir jedesmal nur noch das Nichtverschwinden der Functionaldeterminante der Functionen $J(x, x^{(j)})$ $(j = 1, \cdots, n)$ zu constatiren brauchen, um sicher zu sein, dass mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung aller Gruppen des vierdimensionalen Raumes, bei denen zwei Punkte eine und nur eine, dagegen mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

I.

Erledigung des Problems ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse.

Nach Satz 1 sind die Gruppen, welche wir suchen, zehngliedrig und transitiv. Unter den primitiven Gruppen des vierdimensionalen Raumes, welche von James M. Page[1]) vollständig bestimmt worden sind, giebt es nur zwei zehngliedrige, nämlich:

1. $$\boxed{p_i, \; x_i p_k - x_k p_i, \quad (i, k = 1, \cdots, 4)}$$

Dies ist die Gruppe der euklidischen Bewegungen.

2. $$\boxed{\begin{array}{l} p_i + x_i U, \; x_i p_k - x_k p_i, \quad (i, k = 1, \cdots, 4), \\ (U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4). \end{array}}$$

Dies ist die projective Gruppe der durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0$ dargestellten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit.

Dass diese beiden Gruppen zu den von uns gesuchten gehören, ist längst bekannt. Die Invariante von zwei Punkten lautet übrigens bei 1. und 2. resp.:

1. $$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2,$$

2. $$\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2+(x_4-y_4)^2+\sum_{i<k}^{1,\cdots,4}(x_i y_k - x_k y_i)^2}{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 1)^2}.$$

Wir gehen nun zu den imprimitiven Gruppen über und suchen unter ihnen nach denjenigen, die unsere Forderungen hinsichtlich der Invarianten erfüllen.

Im vierdimensionalen Raum ist Imprimitivität in drei verschiedenen Weisen möglich. Es kann bei einer Gruppe invariant bleiben

1) American Journal of Mathematics, vol. X. No. 4.

1) eine Schaar von ∞^1 dreidimensionalen,
2) eine von ∞^2 zweidimensionalen,
3) eine von ∞^3 eindimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Natürlich können bei einer Gruppe auch mehrere von diesen Fällen zugleich auftreten, dann aber wollen wir immer unsere Aufmerksamkeit nur auf diejenige invariante Schaar von Mannigfaltigkeiten richten, bei welcher die einzelne Mannigfaltigkeit die grösste Dimensionenzahl hat. Wenn also z. B. die Fälle 1) und 2) zugleich auftreten, so rechnen wir die Gruppe zu 1).

Wir müssen nun diese drei Fälle nacheinander erledigen.

Erster Fall. Hier können wir durch Einführung von passenden Coordinaten x, y, z, w erreichen, dass die invariante Schaar durch $x =$ Const. dargestellt wird. Die Gruppe hat dann die Form:

$$X_k f = \xi_k(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z, w)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial z} + \omega_k\frac{\partial f}{\partial w}$$
$$(k = 1, \cdots, 10).$$

Die verkürzte Gruppe $\xi_k(x)\frac{\partial f}{\partial x}$ kann als Gruppe in einer Veränderlichen höchstens dreigliedrig sein. Wir können daher die infinitesimalen Transformationen so auswählen, dass $\xi_k(x) = 0$ ist für $k \geqq 4$. Dann hätten wir in unserer Gruppe sieben infinitesimale Transformationen, in denen das Glied mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ fehlt, in deren Matrix also alle vierreihigen Determinanten identisch verschwinden. Das widerspricht aber unserm Satz 4 (für $m = 3$).

Wir haben also das Resultat:

Unter den Gruppen des vierdimensonalen Raumes mit der verlangten Eigenschaft ist keine in der Weise imprimitiv, dass bei ihr eine Schaar von ∞^1 dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten invariant bleibt.

Wir bemerken, dass dieser Satz allgemein für den n-dimensionalen Raum gilt, vorausgesetzt, dass $n > 3$ ist. Bleibt bei einer Gruppe eine Schaar von ∞^1 $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten invariant, so lassen sich $\frac{n(n+1)}{2} - 3$ infinitesimale Transformationen bilden, in deren Matrix alle n-reihigen Determinanten verschwinden. Nach Satz 4 (für $m = n - 1$) dürfen bei einer Gruppe, wie wir sie suchen, in der Matrix von $\frac{(n-1)n}{2} + 1$ infinitesimalen Transformationen nicht alle n-reihigen

Determinanten verschwinden. Ist also $\frac{n(n+1)}{2} - 3 \geqq \frac{(n-1)n}{2} + 1$, d. h. $n \geqq 4$, so kann jene Gruppe nicht zu den von uns gesuchten gehören.

Zweiter Fall. Eine Schaar von ∞^2 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, aber keine von ∞^1 dreidimensionalen, bleibt invariant.

Wir können die Veränderlichen immer so wählen, dass jene invariante Schaar von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten durch die Gleichungen $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$ dargestellt wird. Die Gruppe hat dann dieses Aussehen:

$$X_k f = \xi_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z, w)\frac{\partial f}{\partial z} + \omega_k \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$(k = 1, \cdots, 10).$$

Die verkürzte Gruppe ist hier sicher primitiv. Denn sonst liessen sich die ∞^2 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten in ∞^1 dreidimensionale Mannigfaltigkeiten anordnen derart, dass diese letzteren eine invariante Schaar bilden. Wir kämen also auf den ersten Fall zurück. Die primitive Gruppe $\xi_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$ ist nun aber entweder fünf- oder sechs- oder achtgliedrig, da es in der Ebene nur drei Typen von primitiven Gruppen giebt, nämlich:

a) die fünfgliedrige specielle lineare,

b) die sechsgliedrige allgemeine lineare,

c) die achtgliedrige allgemeine projective Gruppe.

In den beiden ersten Fällen könnten wir die infinitesimalen Transformationen der Gruppe so auswählen, dass für $k > 6$ $\xi_k(x, y) = \eta_k(x, y) = 0$ wäre. Dann hätten wir aber vier infinitesimale Transformationen, $X_7 f$, $X_8 f$, $X_9 f$, $X_{10} f$, in denen die Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ fehlen, in deren Matrix also alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden. Nach Satz 4 (für $n = 2$) darf dies aber bei den von uns gesuchten Gruppen nicht eintreten.

Es bleibt also nur die dritte Möglichkeit, dass nämlich die verkürzte Gruppe mit der allgemeinen projectiven Gruppe ähnlich ist. Diese Möglichkeit ist aber, wie wir jetzt zeigen wollen, ebenfalls auszuschliessen. Wenn die verkürzte Gruppe mit der allgemeinen projectiven ähnlich ist, so können wir nach Aus-

führung einer geeigneten Variablenänderung die Gruppe $X_k f$ so schreiben $\left(\text{wobei } p = \frac{\partial f}{\partial x}, \ q = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$:

$$\begin{aligned}
X_1 f &= p + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_1 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_2 f &= q + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_3 f &= xp + \zeta_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_3 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_4 f &= yp + \zeta_4 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_4 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_5 f &= xq + \zeta_5 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_5 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_6 f &= yq + \zeta_6 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_6 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_7 f &= x(xp + yq) + \zeta_7 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_7 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_8 f &= y(xp + yq) + \zeta_8 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_8 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_9 f &= \zeta_9 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_9 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_{10} f &= \zeta_{10} \frac{\partial f}{\partial z} + \omega_{10} \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Da die Determinante $\zeta_9 \omega_{10} - \zeta_{10} \omega_9$ nicht identisch verschwinden darf (nach Satz 4 für $m = 1$), so können wir den Anfangspunkt so gewählt denken, dass für ihn der Werth jener Determinante von Null verschieden ist. Dann ist der Anfangspunkt ein Punkt von allgemeiner Lage, weil für ihn die Determinante von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_9 f$, $X_{10} f$ von Null verschieden ist. Man kann zu jeder der übrigen infinitesimalen Transformationen einen geeigneten Ausdruck von der Form Const. $X_9 f$ + Const. $X_{10} f$ addiren derart, dass sie den Anfangspunkt in Ruhe lässt. Diese Addition denken wir uns bereits ausgeführt. Dann bilden $X_3 f, \cdots, X_8 f$ diejenige Untergruppe, welche den Anfangspunkt invariant lässt, der ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Hier gilt also alles das, was wir oben über die Untergruppe $Y_i f$ gesagt haben. Das vollständige System

$$X_3 f = 0, \cdots, X_8 f = 0$$

hat eine und nur eine Lösung $\varphi(x, y, z, w)$. Wäre dieselbe

frei von z und w, so würde sie wegen $X_3 \varphi = x \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ und $X_5 \varphi = x \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ überhaupt eine Constante, also keine eigentliche Lösung sein. Sie wird also sicher eine der beiden Variablen z, w wirklich enthalten, sagen wir w. Dann können wir x, y, z, φ als neue Veränderliche einführen, wodurch $X_3 f, \cdots, X_8 f$ die Form annehmen:

$$
\begin{aligned}
X_3 f &= xp + \gamma_3(x, y, z, \varphi) \frac{\partial f}{\partial z} \\
X_4 f &= yp + \gamma_4 \frac{\partial f}{\partial z} \\
X_5 f &= xq + \gamma_5 \frac{\partial f}{\partial z} \\
X_6 f &= yq + \gamma_6 \frac{\partial f}{\partial z} \\
X_7 f &= x(xp + yq) + \gamma_7 \frac{\partial f}{\partial z} \\
X_8 f &= y(xp + yq) + \gamma_8 \frac{\partial f}{\partial z} .
\end{aligned}
$$

Bei dieser Gruppe, aufgefasst als Gruppe in x, y, z, wobei φ als Constante betrachtet wird, müssten nun nach Satz 3 zwei Punkte eine Invariante haben. Das ist aber nicht der Fall. Durch die Transformation

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}$$

nimmt die verkürzte Gruppe die Form an:

$$p, \; q, \; xq, \; xp + yq, \; xp - yq, \; x(xp + yq).$$

Lie hat aber bewiesen[1]), dass bei einer Gruppe von der Form

$$p + \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \; q + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial z}, \; xq + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$xp + yq + \varphi_4 \frac{\partial f}{\partial z}, \; xp - yq + \varphi_5 \frac{\partial f}{\partial z}, \; x(xp + yq) + \varphi_6 \frac{\partial f}{\partial z}$$

zwei Punkte keine Invariante haben. Vorausgesetzt wird dabei nur, dass keine zwei infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe dieselben Bahncurven haben. Diese Vorraussetzung ist aber offenbar erfüllt, weil sonst schon die ursprüngliche Gruppe

1) Transformationsgruppen, III. S. 416. (Zweiter Fall.)

sie nicht erfüllte und deshalb von vornherein nicht zu den von uns gesuchten Gruppen gehörte.

Wir haben also Folgendes gefunden:

Unter den Gruppen des vierdimensionalen Raumes, welche wir suchen, giebt es keine, die in der Weise imprimitiv ist, dass bei ihr eine Schaar von ∞^2 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten invariant bleibt.

Ist $n > 4$ und sucht man in einem n-dimensionalen Raum alle Gruppen, die die mehrfach erwähnte Eigenschaft hinsichtlich der Invarianten von zwei und mehr als zwei Punkten haben, so gilt ebenfalls der Satz, dass keine unter diesen Gruppen derart imprimitiv sein kann, dass bei ihr eine invariante Schaar von ∞^2 $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten existirt. Dies ergiebt sich unmittelbar aus Satz 4 (für $m = n - 2$). Wäre nämlich $x_1 =$ Const., $x_2 =$ Const. die invariante Schaar von ∞^2 $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, so hätte die Gruppe die Form

$$X_k f = \xi_{k,1}(x_1, x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k,2}(x_1, x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$+ \xi_{k,3}(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + \xi_{k,n}\frac{\partial f}{\partial x_n}. \quad \left(k = 1, 2, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Die verkürzte Gruppe

$$\xi_{k,1}(x_1, x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k,2}(x_1, x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

wäre primitiv und demnach höchstens achtgliedrig. Man könnte also $\frac{n(n+1)}{2} - 8$ infinitesimale Transformationen bilden, in denen die Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ fehlen, in deren Matrix also alle $(n-1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Nach Satz 4 müsste dann

$$\frac{n(n+1)}{2} - 8 < \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1 \quad \text{oder} \quad n < 5$$

sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Dritter Fall. Eine Schaar von ∞^3 Curven bleibt invariant, aber keine Schaar von mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Wenn $x =$ Const., $y =$ Const., $z =$ Const. die invariante Curvenschaar darstellt, so hat die Gruppe folgende Gestalt:

$$X_k f = \xi_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ \zeta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} + \omega_k(x, y, z, w)\frac{\partial f}{\partial w}, \quad (k = 1, \cdots, 10)$$

und die verkürzte Gruppe

$$\xi_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

ist nothwendig primitiv, da man sonst auf einen der schon erledigten Fälle zurückkäme. Die verkürzte Gruppe ist offenbar höchstens zehngliedrig und kann andrerseits nicht weniger als neungliedrig sein. Sonst könnte man wenigstens zwei infinitesimale Transformationen so auswählen, dass sie keine Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ enthalten. Dann hätte man aber zwei infinitesimale Transformationen mit denselben Bahncurven, was nicht sein darf.

Aber auch der Fall, dass die verkürzte Gruppe neungliedrig ist, kann nicht eintreten, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil es keine neungliedrige primitive Gruppe in drei Veränderlichen giebt. Lie[1]) hat nämlich alle primitiven Gruppen des dreidimensionalen Raumes bestimmt und eine geringe Anzahl von Typen gefunden, auf die sich alle diese Gruppen durch Punkttransformation zurückführen lassen. Unter diesen Typen ist aber kein neungliedriger, dagegen giebt es zwei zehngliedrige. Diese sind:

1) die projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes

$$p - yr,\ q + xr,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr,$$
$$zp - yU,\ zq + xU,\ zU,$$

wobei

$$U = xp + yq + zr$$

und

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y},\ r = \frac{\partial f}{\partial z} \text{ ist.}$$

2) die Gruppe aller Transformationen durch reciproke Radien oder die sog. conforme Gruppe:

1) Norwegisches Archiv, Bd. 9. 1884.

$$p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr,\ U,\ 2xU - Sp,$$
$$2yU - Sq,\ 2zU - Sr.$$

Dabei ist

$$S = x^2 + y^2 + z^2.$$

In eine von diesen beiden Gruppen muss sich also die verkürzte Gruppe $\xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z}$ durch eine Punkttransformation überführen lassen.

Wir haben dementsprechend zwei Fälle zu behandeln:

Erster Fall. Die verkürzte Gruppe ist ähnlich mit der projectiven Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes.

Zweiter Fall. Die verkürzte Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe aller Transformationen durch reciproke Radien.

Es ist bemerkenswerth, dass man bei der Erledigung unseres Problems im vierdimensionalen und auch, wie sich später zeigen wird, im fünfdimensionalen Raum auf eine so geringe Anzahl von Möglichkeiten geführt wird. Im dreidimensionalen Raume ist die Anzahl der zu discutirenden Fälle bei weitem grösser.

Erledigung des ersten Falles.

Hier lässt sich die Gruppe auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
X_1 f &= p - yr + \varphi_1 (x, y, z, w) \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_2 f &= q + xr + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_3 f &= r + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_4 f &= xq + \varphi_4 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_5 f &= xp - yq + \varphi_5 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_6 f &= yp + \varphi_6 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_7 f &= xp + yq + 2zr + \varphi_7 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_8 f &= zp - yU + \varphi_8 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_9 f &= zq + xU + \varphi_9 \frac{\partial f}{\partial w}\\
X_{10} f &= zU + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Da $(X_1 X_2) = 2 X_3$, $(X_1 X_3) = 0$, $(X_2 X_3) = 0$ ist, so bilden die Gleichungen

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad X_3 f = 0$$

ein vollständiges System. Wir können voraussetzen, dass die Functionen φ_k sich in der Nähe des Anfangspunktes regulär verhalten. Es giebt dann eine Lösung des vollständigen Systems, die in der Umgebung des Anfangspunktes sich regulär verhält und für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ auf w reducirt. Die dazu erforderliche Bedingung, dass die zu p, q, r gehörige Determinante in $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ für den Anfangspunkt nicht verschwindet, ist offenbar erfüllt.[1]) Wir können diese Lösung als neue Variable an Stelle von w einführen, wodurch wir erreichen, dass $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ wird, und an Stelle der übrigen Functionen neue erhalten, die sich in der Nähe des Anfangspunktes ebenfalls regulär verhalten. Diese Umformung denken wir uns bereits ausgeführt, d. h. wir nehmen von vorneherein an

$$X_1 f = p - yr, \quad X_2 f = q + xr, \quad X_3 f = r.$$

Die übrigen infinitesimalen Transformationen haben ihre frühere Form behalten.

Combinirt man nun $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ mit $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$, $X_7 f$, so kommen immer Resultate von der Form Const. $X_1 f$ + Const. $X_2 f$ + Const. $X_3 f$, in denen also kein Glied mit $\frac{\partial f}{\partial w}$ auftritt. Daraus geht hervor, dass die Functionen φ_4, φ_5, φ_6, φ_7 frei von x, y, z sind und nur von w abhängen.

Die Klammerrelationen

$$(X_4 X_5) = -2 X_4, \ (X_4 X_6) = X_5, \ (X_5 X_6) = -2 X_6,$$
$$(X_4 X_7) = 0, \ (X_5 X_7) = 0, \ (X_6 X_7) = 0$$

liefern zur Bestimmung der Functionen $\varphi_4, \cdots, \varphi_7$ die Gleichungen:

$$\varphi_4 \frac{d\varphi_5}{dw} - \varphi_5 \frac{d\varphi_4}{dw} = -2\varphi_4$$
$$\varphi_4 \frac{d\varphi_6}{dw} - \varphi_6 \frac{d\varphi_4}{dw} = \varphi_5$$
$$\varphi_5 \frac{d\varphi_6}{dw} - \varphi_6 \frac{d\varphi_5}{dw} = -2\varphi_6$$

1) Der betreffende Satz über vollständige Systeme findet sich z. B. Transformationsgruppen, I, S. 91.

$$\varphi_4 \frac{d\varphi_7}{dw} - \varphi_7 \frac{d\varphi_4}{dw} = 0$$

$$\varphi_5 \frac{d\varphi_7}{dw} - \varphi_7 \frac{d\varphi_5}{dw} = 0$$

$$\varphi_6 \frac{d\varphi_7}{dw} - \varphi_7 \frac{d\varphi_6}{dw} = 0.$$

Die Determinanten der drei letzten Gleichungen, die linear und homogen in φ_7 und $\frac{d\varphi_7}{dw}$ sind, sind gerade die linken Seiten der drei ersten. Wäre also z. B. $\varphi_4 \neq 0$ (dann sind übrigens auch φ_5, φ_6 beide von Null verschieden), so würde folgen $\varphi_7 = 0$. Da wir durch Einführung von $\int \frac{dw}{\varphi_4(w)}$ als neues w erreichen können, dass $\varphi_4 = 1$ wird, so wollen wir von vorneherein annehmen $\varphi_4 = 1$. Dann ergiebt sich aus den obenstehenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d\varphi_5}{dw} = -2, \quad \frac{d\varphi_6}{dw} = \varphi_5,$$

also

$$\varphi_5 = -2(w+a), \quad \varphi_6 = -(w+a)^2 - b.$$

Aber aus $\varphi_5 \frac{d\varphi_6}{dw} - \varphi_6 \frac{d\varphi_5}{dw} = -2\varphi_6$ folgt $b = 0$. Führt man noch $w + a$ als neues w ein, so wird $\varphi_5 = -2w$, $\varphi_6 = -w^2$.

Wir haben also

$$X_4 f = xq + \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_5 f = xp - yq - 2w \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_6 f = yp - w^2 \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_7 f = xp + yq + 2zr$$

$X_8 f$, $X_9 f$, $X_{10} f$ haben ihre Form behalten. Zur Bestimmung von φ_9 erhalten wir aus den Klammerrelationen

$$(X_1 X_9) = X_5 + X_7, \quad (X_2 X_9) = 2X_4,$$

$$(X_3 X_9) = X_2, \quad (X_7 X_9) = X_9:$$

$$\frac{\partial\varphi_9}{\partial x} = -2w, \quad \frac{\partial\varphi_9}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial\varphi_9}{\partial z} = 0,$$

$$x\frac{\partial\varphi_9}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi_9}{\partial y} + 2z\frac{\partial\varphi_9}{\partial z} = \varphi_9.$$

Daraus ergiebt sich unmittelbar $\varphi_9 = 2(y - wx)$. Also ist

$$X_9 f = zq + xU + 2(y - wx)\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Offenbar ist nun der Anfangspunkt ein Punkt von allgemeiner Lage, da für ihn die Determinante von X_1f, X_2f, X_3f, X_4f einen von Null verschiedenen Werth hat. Ferner sind X_5f, X_6f, X_7f, X_9f vier infinitesimale Transformationen, die ihn in Ruhe lassen. Es müsste also, wenn zwei Punkte eine Invariante haben sollen, nach Satz 2 die Determinante dieser vier infinitesimalen Transformationen identisch verschwinden, d. h. es müsste

$$\begin{vmatrix} x, & -y, & 0, & -2w \\ y, & 0, & 0, & -w^2 \\ x, & y, & 2z, & 0 \\ x^2, & xy + z, & xz, & 2(y - wx) \end{vmatrix} = 0$$

sein. Aber schon für $w = 0$ ist die linke Seite gleich $-4zy^3$, also keineswegs identisch Null.

Unsere ursprüngliche Annahme $\varphi_4 \neq 0$ führt also zu keinem für uns brauchbaren Resultat. Wir müssen daher annehmen $\varphi_4 = 0$, woraus vermöge der zwischen φ_4, φ_5, φ_6 bestehenden Relationen folgt, dass auch $\varphi_5 = \varphi_6 = 0$ ist. Wäre nun auch noch $\varphi_7 = 0$, so würden in der Matrix von sieben infinitesimalen Transformationen, nämlich X_1f, X_2f, X_3f, X_4f, X_5f, X_6f, X_7f, alle vierreihigen Determinanten verschwinden, was nach dem mehrfach benutzten Satz 4 (für $n = 3$) nicht sein darf. Es ist also $\varphi_7 \neq 0$, und wir können durch Einführung von $\int \frac{dw}{\varphi_7(w)}$ als neues w erreichen, dass $\varphi_7 = 1$ wird.

Unsere Gruppe hat jetzt dieses Aussehen:

$$\begin{aligned} X_1f &= p - yr \\ X_2f &= q + xr \\ X_3f &= r \\ X_4f &= xq \\ X_5f &= xp - yq \\ X_6f &= yp \\ X_7f &= xp + yq + 2zr + \frac{\partial f}{\partial w} \\ X_8f &= zp - yU + \varphi_8 \frac{\partial f}{\partial w} \end{aligned}$$

$$X_9 f = zq + xU + \varphi_9 \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_{10} f = zU + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Hier liefern die Klammerrelationen

$$(X_3 X_8) = X_1, \quad (X_2 X_8) = X_5 - X_7, \quad (X_1 X_8) = -2 X_6$$

für φ_8 die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_8}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial \varphi_8}{\partial x} = 0.$$

Demnach ist $$\varphi_8 = \alpha(w) - y.$$

Ebenso ergiebt sich aus

$$(X_3 X_9) = X_2, \quad (X_2 X_9) = 2 X_4, \quad (X_1 X_9) = X_5 + X_7,$$

dass $$\varphi_9 = \beta(w) + x,$$

und aus $(X_3 X_{10}) = X_7$, $(X_4 X_{10}) = 0$, $(X_6 X_{10}) = 0$,

dass $$\varphi_{10} = \gamma(w) + z \text{ ist.}$$

Endlich folgt aus den Relationen

$$(X_4 X_8) = -X_9, \quad (X_6 X_9) = -X_8, \quad (X_8 X_9) = 2 X_{10},$$

dass $$\alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ ist.}$$

Demnach ist $\varphi_8 = -y$, $\varphi_9 = x$, $\varphi_{10} = z$, und die Gruppe hat, wenn wir die Variablen mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen, diese Form:

$$3. \quad \boxed{\begin{array}{c} p_1 - x_2 p_3, \; p_2 + x_1 p_3, \; p_3, \; x_1 p_2, \; x_1 p_1 - x_2 p_2, \; x_2 p_1, \\ x_3 p_3 + (U + p_4), \; x_3 p_1 - x_2 (U + p_4), \; x_3 p_2 + x_1 (U + p_4), \\ x_3 (U + p_4). \quad (U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.) \end{array}}$$

Man überzeugt sich durch wirkliches Integriren des betreffenden vollständigen Systems, dass zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben. Sie lautet, wenn man die beiden Punkte mit $(x_1 \cdots x_4)$ und $(y_1 \cdots y_4)$ bezeichnet,

$$J(x, y) = (x_3 - y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_2)\, e^{-(x_4 + y_4)}.$$

Um sicher zu sein, dass mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben, braucht man, wie früher gezeigt wurde, nur zu untersuchen, ob die Functionaldeterminante von

$$J(x, y^{(1)}), \quad J(x, y^{(2)}), \quad J(x, y^{(3)}), \quad J(x, y^{(4)}),$$

wo die $y^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, 4)$ vier verschiedene Punkte sind, identisch verschwindet oder nicht. Diese Functionaldeterminante ist aber

$$\left| -y_2^{(i)} e^{-\left(x_4 + y_4^{(i)}\right)}, \quad y_1^{(i)} e^{-\left(x_4 + y_4^{(i)}\right)}, \quad e^{-\left(x_4 + y_4^{(i)}\right)}, -J(x, y^{(i)}) \right|$$

oder

$$e^{-\sum_1^4 i\left(x_4 + y_4^{(i)}\right)} \left| y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)} - x_3, 1 \right|.$$

Der erste Factor ist von Null verschieden, der zweite ist für $x_3 = 0$ seinem absoluten Betrage nach gleich dem sechsfachen Volumen des von den vier Punkten $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)})$ im dreidimensionalen Raum gebildeten Tetraeders. Also ist auch der zweite Factor nicht identisch gleich Null, wenn die Punkte $y^{(i)}$ geeignet gewählt werden. Es haben mithin mehr als zwei Punkte bei der Gruppe 3 keine wesentliche Invariante, und wir haben also eine der von uns gesuchten Gruppen vor uns.

Bei der gefundenen Gruppe bleibt, wie wir wissen, die Curvenschaar $x_1 =$ Const., $x_2 =$ Const., $x_3 =$ Const. invariant. Sie ist aber auch die einzige invariante Curvenschaar. Gäbe es nämlich noch eine zweite, so wären mit jedem Punkt zwei Richtungen verbunden, die invariant bleiben, wenn der Punkt festgehalten wird. Wird durch eine Transformation der Gruppe ein Punkt in einen andern übergeführt, so gehen auch jene beiden zu ihm gehörigen Richtungen in die zu dem andern Punkt gehörigen über. Der Anfangspunkt kann, da er ein Punkt von allgemeiner Lage ist, durch Transformationen der Gruppe in alle Punkte seiner Umgebung übergeführt werden. Würden also die zu ihm gehörigen beiden Richtungen zusammenfallen, so würde dasselbe für die ganze Umgebung des Anfangspunktes gelten, d. h. wir hätten nicht zwei verschiedene invariante Curvenschaaren. Die durch den Anfangspunkt gehenden Richtungen werden nun durch die Gruppe

$$x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_2 p_1,\ x_3 p_1 - x_2(U + p_4),$$
$$x_3 p_2 + x_1(U + p_4),\ x_3(U + p_4)$$

transformirt, wobei jede Richtung durch vier homogene Coordinaten, x_1, x_2, x_3, x_4, charakterisirt ist. Um die invarianten Richtungen zu finden, hat man die zweireihigen Determinanten der Matrix dieser Gruppe gleich Null zu setzen. Dies giebt aber $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, also nur eine invariante Richtung. Es giebt deshalb auch nur eine invariante Curvenschaar.

Die gefundene Gruppe ist systatisch. Denn hält man einen

Punkt von allgemeiner Lage, z. B. den Anfangspunkt, fest, so bleiben alle Punkte der durch ihn hindurchgehenden Curve der invarianten Schaar einzeln invariant. Man überzeugt sich davon durch den Anblick der Untergruppe, welche den Anfangspunkt in Ruhe lässt. Es ist die soeben benutzte sechsgliedrige Gruppe. Man erkennt, dass für $x_1 = x_n = x_3 = 0$ alle ihre Glieder verschwinden.

Es sei bemerkt, dass die Gruppe 3, wenn man e^{x_4} als neue Variable an Stelle von x_4 einführt, in eine projective Gruppe übergeht, nämlich:

$$3'. \quad \boxed{\begin{array}{c} p_1 - x_2 p_3,\ p_2 + x_1 p_3,\ p_3,\ x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_2 p_1, \\ x_3 p_3 + U,\ x_3 p_1 - x_2 U,\ x_3 p_2 + x_1 U,\ x_3 U. \\ (U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4.) \end{array}}$$

Die Invariante von zwei Punkten wird dann eine rationale Function

$$J = \frac{x_3 - y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_4 y_4}.$$

Die Mannigfaltigkeiten $J = \text{Const.}$ sind die ∞^4 Ebenen des vierdimensionalen Raumes.

Der Zähler von J ist eine Invariante von zwei Punkten bei der Gruppe in x_1, x_2, x_3:

$$p_1 - x_2 p_3,\ p_2 + x_1 p_3,\ p_3,\ x_1 p_2,\ x_1 p_1 - x_2 p_2,\ x_2 p_1,$$

welche von den ersten sechs infinitesimalen Transformationen der Gruppe 3′ gebildet wird. Diese Gruppe in drei Veränderlichen gehört auch zu den Gruppen, bei welchen zwei Punkte eine und nur eine Invariante, dagegen mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben. Man findet sie in dem Verzeichniss dieser Gruppen bei Lie[1]), und zwar ist es die mit (10) bezeichnete Gruppe. Auf die eben gemachte Bemerkung werden wir später in grösserer Allgemeinheit zurückkommen.

Erledigung des zweiten Falles.

Wir haben jetzt noch den Fall zu erledigen, wo die invariante Curvenschaar durch eine mit der conformen Gruppe ähnliche Gruppe transformirt wird. In diesem Falle lässt sich die Gruppe selbst so schreiben:

1) Transformationsgruppen III, S. 434.

$$\begin{aligned}
X_1 f &= p \quad + \varphi_1(x, y, z, w)\frac{\partial f}{\partial w} \\
X_2 f &= q \quad + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_3 f &= r \quad + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_4 f &= xq - yp + \varphi_4 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_5 f &= yr - zq + \varphi_5 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_6 f &= zp - xr + \varphi_6 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_7 f &= U \quad + \varphi_7 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_8 f &= 2xU - Sp + \varphi_8 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_9 f &= 2yU - Sq + \varphi_9 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_{10} f &= 2zU - Sr + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $U = xp + yq + zr$, $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Ebenso wie in dem ersten Falle können wir auch hier, indem wir die Lösung des vollständigen Systems

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad X_3 f = 0$$

als neues w einführen, erreichen, dass $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ wird, d. h. $X_1 f = p$, $X_2 f = q$, $X_3 f = r$. Es zeigt sich dann sofort, dass $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ nur Functionen von w sind.

Die Klammerrelationen

$$(X_4 X_5) = -X_6, \quad (X_5 X_6) = -X_4, \quad (X_6 X_4) = -X_5,$$
$$(X_4 X_7) = 0, \quad (X_5 X_7) = 0, \quad (X_6 X_7) = 0$$

geben zur Bestimmung der Functionen $\varphi_4, \cdots, \varphi_7$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_4 \frac{d\varphi_5}{dw} - \varphi_5 \frac{d\varphi_4}{dw} &= -\varphi_6 & \qquad \varphi_4 \frac{d\varphi_7}{dw} - \varphi_7 \frac{d\varphi_4}{dw} &= 0 \\
\varphi_5 \frac{d\varphi_6}{dw} - \varphi_6 \frac{d\varphi_5}{dw} &= -\varphi_4 & \qquad \varphi_5 \frac{d\varphi_7}{dw} - \varphi_7 \frac{d\varphi_5}{dw} &= 0 \\
\varphi_6 \frac{d\varphi_4}{dw} - \varphi_4 \frac{d\varphi_6}{dw} &= -\varphi_5 & \qquad \varphi_6 \frac{d\varphi_7}{dw} - \varphi_7 \frac{d\varphi_6}{dw} &= 0.
\end{aligned}$$

Wäre nun $\varphi_4 \neq 0$ (und infolgedessen auch φ_5, φ_6 von Null verschieden), so könnte man durch Einführung von $\int \frac{dw}{\varphi_4(w)}$ als neues w erreichen, dass $\varphi_4 = 1$ wird. Aus den drei rechtsstehenden Gleichungen folgt ausserdem $\varphi_7 = 0$, so dass wir haben:

$$X_4 f = xq - yp + \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_7 f = U.$$

Für φ_5, φ_6 ergiebt sich

$$\frac{d\varphi_5}{dw} = -\varphi_6, \frac{d\varphi_6}{dw} = \varphi_5, \quad \text{ferner} \quad \varphi_5^2 + \varphi_6^2 + 1 = 0.$$

Setzen wir $\varphi_5 = i \cos \psi(w)$, $\varphi_6 = i \sin \psi(w)$, so ergiebt sich $\frac{d\psi(w)}{dw} = 1$, also $\psi(w) = w + c$. Führen wir $w + c$ als neues w ein, so wird $\varphi_5 = i \cos w$, $\varphi_6 = i \sin w$, also

$$X_5 f = yr - zq + i \cos w \cdot \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_6 f = zp - xr + i \sin w \cdot \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Die Klammerrelationen

$$(X_1 X_8) = 2 X_7, \ (X_2 X_8) = 2 X_4, \ (X_3 X_8) = -2 X_6, \ (X_7 X_8) = X_8$$

liefern:

$$\varphi_8 = 2y - 2iz \sin w.$$

Ebenso erhält man aus

$$(X_1 X_9) = -2 X_4, \ (X_2 X_9) = 2 X_7, \ (X_3 X_9) = 2 X_5, \ (X_7 X_9) = X_9:$$

$$\varphi_9 = -2x + 2iz \cos w.$$

Es ist demnach

$$X_8 f = 2xU - Sp + 2(\quad y - iz \sin w) \frac{\partial f}{\partial w}$$

$$X_9 f = 2yU - Sq + 2(-x + iz \cos w) \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Nun ist der Anfangspunkt ein Punkt von allgemeiner Lage, da die Determinante von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ für ihn nicht verschwindet. Ferner sind $X_6 f$, $X_7 f$, $X_8 f$, $X_9 f$ vier infinitesimale Transformationen, die ihn in Ruhe lassen. Also müsste nach Satz 2 ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} z, & 0, & -x, & i\sin w \\ x, & y, & z, & 0 \\ 2x^2 - S, & 2xy, & 2xz, & 2(y - iz\sin w) \\ 2yx, & 2y^2 - S, & 2yz, & 2(-x + iz\cos w) \end{vmatrix} = 0$$

sein. Das ist aber nicht der Fall. Denn, betrachtet man die Variablen als reell, so ist der reelle Theil der linken Seite $-2yz^2 S$, also keineswegs identisch Null.

Wir müssen daher annehmen, dass $\varphi_4 = 0$ und infolgedessen auch $\varphi_5 = \varphi_6 = 0$ ist. Dann kann nicht auch $\varphi_7 = 0$ sein, weil sonst in der Matrix der sieben infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \cdots, X_7 f$ alle vierreihigen Determinanten verschwinden würden, was nach Satz 4 bei den von uns gesuchten Gruppen nicht eintreten darf. In bekannter Weise können wir noch erreichen, dass $\varphi_7 = 1$ wird, so dass unsere Gruppe die Form annimmt:

$$\begin{aligned}
X_1 f &= p \\
X_2 f &= q \\
X_3 f &= r \\
X_4 f &= xq - yp \\
X_5 f &= yr - zq \\
X_6 f &= zp - xr \\
X_7 f &= xp + yq + 2zr + \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_8 f &= 2xU - Sp + \varphi_8 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_9 f &= 2yU - Sq + \varphi_9 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_{10} f &= 2zU - Sr + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Aus $(X_1 X_8) = 2X_7$, $(X_2 X_8) = 2X_4$, $(X_3 X_8) = -2X_6$ ergiebt sich, dass

$$\varphi_8 = 2x + \alpha(w)$$

ist. Ebenso findet man

$$\varphi_9 = 2y + \beta(w), \quad \varphi_{10} = 2z + \gamma(w).$$

Die Relationen

$$(X_6 X_8) = X_{10}, \quad (X_4 X_9) = X_8, \quad (X_5 X_{10}) = X_9$$

zeigen, dass $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist. Bezeichnen wir jetzt die Variablen mit x_1, x_2, x_3, x_4, so hat unsere Gruppe die folgende Form:

$$4. \quad \boxed{\begin{gathered} p_1, p_2, p_3, x_1p_2 - x_2p_1, x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, \\ U + p_4, 2x_1(U + p_4) - Sp_1, 2x_2(U + p_4) - Sp_2, \\ 2x_3(U + p_4) - Sp_3. \\ (U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3, S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \end{gathered}}$$

Dass bei dieser Gruppe zwei Punkte wirklich eine und nur eine Invariante haben, findet man durch Integration des betreffenden vollständigen Systems, wodurch man erhält

$$J(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2] \; e^{-(x_4 + y_4)}.$$

Auch überzeugt man sich leicht, dass die Functionaldeterminante der vier Functionen $J(x, y^{(i)})$ $(i = 1, \cdots, 4)$ nicht identisch verschwindet, dass also mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

$x_1 = \text{Const.}$, $x_2 = \text{Const.}$, $x_3 = \text{Const.}$ ist auch bei dieser Gruppe die einzige invariante Curvenschaar. Der Beweis wird ganz ebenso geführt wie für die Gruppe 3.

Die Gruppe 4 ist ebenso wie die Gruppe 3 systatisch. Hält man z. B. den Anfangspunkt fest, der ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so bleibt die Untergruppe

$$x_1p_2 - x_2p_1, \; x_2p_3 - x_3p_2, \; x_3p_1 - x_1p_3, \; 2x_1(U + p_4) - Sp_1, \\ 2x_2(U + p_4) - Sp_2, \; 2x_3(U + p_4) - Sp_3,$$

welche alle Punkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ invariant lässt.

Die Gruppe 4 lässt sich durch Einführung von e^{x_4} als neues x_4 so umformen, dass die Invariante von zwei Punkten eine rationale Function wird. Die Gruppe sieht dann so aus:

$$4'. \quad \boxed{\begin{gathered} p_1, p_2, p_3, x_1p_2 - x_2p_1, x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3, \\ U, 2x_1U - Sp_1, 2x_2U - Sp_2, 2x_3U - Sp_3. \\ (U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4, S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{gathered}}$$

Jetzt ist

$$J = \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}{x_4 y_4}.$$

Der Zähler ist hier die bekannte Invariante von zwei Punkten bei der Gruppe der Bewegungen im gewöhnlichen Raum. Die sechs ersten infinitesimalen Transformationen von $4'$ sind gerade die der Gruppe der Bewegungen im gewöhnlichen Raum. Hier finden wir also etwas ganz Analoges wie bei der Gruppe $3'$. Auch der Nenner der beiden Invarianten bei $3'$ und $4'$ ist derselbe.

Es ist übrigens, wie wir hier nicht ausführlich beweisen wollen, unmöglich, die Gruppe 4 auf projective Form zu bringen.

Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so können wir sagen:

Wenn man auf Realitätsverhältnisse keine Rücksicht nimmt, so giebt es im vierdimensonalen Raum vier Typen von Gruppen, bei denen zwei Punkte eine und nur eine, mehr als zwei dagegen keine wesentliche Invariante haben. Es sind, wenn wir statt 3 und 4 die mit ihnen gleichberechtigten Typen $3'$ und $4'$ schreiben, die folgenden:

1. $$p_i, \; x_i p_k - x_k p_i. \quad (i, k = 1, \cdots, 4)$$

2. $$p_i + x_i U, \; x_i p_k - x_k p_i. \quad (i, k = 1, \cdots, 4)$$

3. $$p_1 - x_2 p_3, \; p_2 + x_1 p_3, \; p_3, \; x_1 p_2, \; x_1 p_1 - x_2 p_2, \; x_2 p_1, \; x_3 p_3 + U, \; x_3 p_1 - x_2 U, \; x_3 p_2 + x_1 U, \; x_3 U.$$

4. $$p_1, \; p_2, \; p_3, \; x_1 p_2 - x_2 p_1, \; x_2 p_3 - x_3 p_2, \; x_3 p_1 - x_1 p_3, \; U, \; 2x_1 U - S p_1, \; 2x_2 U - S p_2, \; 2x_3 U - S p_3.$$

Dabei ist

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4, \quad S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Von diesen Gruppen sind 1, 2, 3 projectiv. Dagegen kann 4, wie schon einmal erwähnt, durch keine Transformation auf projective Form gebracht werden.

Bisher haben wir auf Realitätsverhältnisse keine Rücksicht genommen. Das wollen wir jetzt thun und uns zur Erledigung desselben Problems, aber unter Beschränkung auf reelle Gruppen, wenden.

II.

Erledigung des Problems unter Beschränkung auf reelle Gruppen.

Nach einem Theorem von Lie[1]) kann man unter gewissen Voraussetzungen über die Differenzirbarkeit der auftretenden Functionen jede reelle continuirliche Gruppe von Punkttransformationen in reeller Weise so umformen, dass man auf eine analytische Gruppe kommt, d. h. eine Gruppe, in welcher die in den endlichen Gleichungen und in den infinitesimalen Transformationen auftretenden Functionen analytische Functionen im Sinne von Weierstrass sind. In einer so umgeformten Gruppe kann man den Veränderlichen auch complexe Werthe ertheilen. Wenn die reelle Gruppe unsere Forderungen hinsichtlich der Invarianten erfüllt, so wird sie es auch dann noch thun, wenn wir die Variablen nicht mehr bloss auf reelle Werthe beschränken. Wir können also schliessen, dass die reelle Gruppe durch eine reelle oder complexe Punkttransformation mit einem der vier von uns bestimmten Typen ähnlich sein muss. Aber auch die Umkehrung ist richtig. Wenn eine reelle Gruppe mit einem der vier Typen ähnlich ist, so erfüllt sie unsere Forderungen. Inbetreff einer näheren Begründung verweisen wir auf die Arbeiten Lies über dasselbe Problem im dreidimensionalen Raume.[2])

Es handelt sich also nur darum, alle reellen Gruppen zu bestimmen, die mit einem jener vier Typen durch eine reelle oder complexe Punkttransformation ähnlich sind.

Was die reellen Gruppen anbetrifft, welche mit dem Typus 1 oder 2 ähnlich sind, so können wir uns auf ein allgemeines Theorem von Lie berufen[3]), nach welchem jede reelle Gruppe in n Veränderlichen, die mit der Gruppe

$$p_i, \; x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, \cdots, n)$$

oder mit der Gruppe

$$p_i + x_i U, \; x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, \cdots, n)$$

---

1) Vgl. Transformationsgruppen, III. S. 366.
2) z. B. Transformationsgruppen, III. S. 400 ff.
3) Transformationsgruppen, III. S. 391.

ähnlich ist (durch eine reelle oder complexe Punkttransformation), sich in reeller Weise überführen lässt im ersten Falle in eine der Gruppen

$$p_1, \cdots, p_n, \; x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \; x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu,$$
$$x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k}$$
$$(\mu, \nu = 1, \cdots, m (\leq n); \; k, j = 1, \cdots, n - m),$$

im zweiten Falle in die projective Gruppe einer $(n-1)$-dimensionalen nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades, die durch eine reelle Gleichung dargestellt wird.

Wir erhalten demnach als Typen von reellen Gruppen, die mit der Gruppe 1 durch reelle oder complexe Punkttransformation ähnlich sind, die folgenden:

I. $\boxed{p_1, p_2, p_3, p_4, x_i p_k - x_k p_i, \quad (i, k = 1, \cdots, 4).}$

II. $\boxed{\begin{array}{r} p_1, p_2, p_3, p_4, x_1 p_2 - x_2 p_1, x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, \\ x_1 p_4 + x_4 p_1, x_2 p_4 + x_4 p_2, x_3 p_4 + x_4 p_3. \end{array}}$

III. $\boxed{\begin{array}{c} p_1, p_2, p_3, p_4, x_1 p_2 - x_2 p_1, x_3 p_4 - x_4 p_3, \\ x_1 p_3 + x_3 p_1, x_1 p_4 + x_4 p_1, x_2 p_3 + x_3 p_2, x_2 p_4 + x_4 p_2. \end{array}}$

Ist dagegen eine reelle Gruppe mit der Gruppe 2 durch eine reelle oder complexe Punkttransformation ähnlich, so lässt sie sich nach dem oben ausgesprochenen Theorem in reeller Weise überführen in die projective Gruppe einer dreidimensionalen nichtausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit reeller Gleichung. Diese Gleichung lässt sich aber durch eine reelle projective Transformation auf eine der drei Formen bringen:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 1 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0.$$

Diesen drei Möglichkeiten entsprechen die drei Typen:

IV. $p_i + x_i U,\ x_i p_k - x_k p_i, \quad (i,\ k = 1, \cdots, 4).$

V. $$p_1 - x_1 U,\ p_2 - x_2 U,\ p_3 - x_3 U,\ p_4 + x_4 U,$$
$$x_1 p_2 - x_2 p_1,\ x_2 p_3 - x_3 p_2,\ x_3 p_1 - x_1 p_3,$$
$$x_1 p_4 + x_4 p_1,\ x_2 p_4 + x_4 p_2,\ x_3 p_4 + x_4 p_3.$$

VI. $p_i - x_i U,\ x_i p_k - x_k p_i, \quad (i,\ k = 1, \cdots, 4).$

Es bleibt noch übrig, diejenigen reellen Gruppen zu bestimmen, welche mit einer der Gruppen 3 und 4 ähnlich sind. Bei einer solchen Gruppe muss eine reelle Schaar von ∞^3 Curven invariant bleiben. Dass überhaupt eine Curvenschaar invariant bleibt, folgt daraus, dass bei den Gruppen 3 und 4 je eine Curvenschaar invariant bleibt. Wäre die invariante Curvenschaar der reellen Gruppe imaginär, so bliebe auch die conjugirt imaginäre Curvenschaar invariant. Es gäbe also auch bei 3 oder 4 zwei invariante Curvenschaaren. Das ist aber, wie wir früher gesehen haben, nicht der Fall.

Die invariante Curvenschaar ist also sicher reell und demgemäss durch reelle Gleichungen

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ w) = \text{Const.},\ \psi = \text{Const.},\ \chi = \text{Const.}$$

darstellbar. φ, ψ, χ können wir als neue Veränderliche an Stelle von x, y, z einführen und eine passend gewählte vierte Function an Stelle von w. Durch diese reelle Transformation bringen wir die Gruppe auf die Form

$$X_k f = \xi_k(x,\ y,\ z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x,\ y,\ z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x,\ y,\ z)\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+ \omega_k(x,\ y,\ z,\ w)\frac{\partial f}{\partial w} \quad (k = 1, \cdots, 10.)$$

Die verkürzte Gruppe

$$\overline{X}_k f = \xi_k\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial z}$$

ist nun durch eine reelle oder complexe Punkttransformation ähnlich mit der verkürzten Gruppe des Typus 3 oder 4, also entweder mit der projectiven Gruppe eines nichtausgearteten linearen Complexes oder mit der conformen Gruppe.

Erster Fall. $\overline{X}_k f$ ist mit der projectiven Gruppe eines nichtausgearteten linearen Complexes ähnlich.

Dann bleibt bei $\overline{X}_k f$ eine reelle nichtintegrable Pfaffsche Gleichung

$$\alpha(x, y, z)dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

invariant. Dass überhaupt eine solche Gleichung bei der Gruppe invariant bleiben muss, folgt aus der Aehnlichkeit mit der projectiven Gruppe eines linearen Complexes. Wäre aber die Gleichung nicht reell, so würde auch die conjugirt imaginäre invariant bleiben. Das würde aber einen Widerspruch mit der Primitivität der Gruppe ergeben.

Wir können nun jene reelle Pfaffsche Gleichung in reeller Weise auf die Form

$$d\mathfrak{z} - \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x} = 0$$

bringen, und dann lässt sich die in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ geschriebene Gruppe ansehen als eine reelle Gruppe von Berührungstransformationen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$-ebene, indem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ als Bestimmungsstücke eines Linienelements in dieser Ebene betrachtet werden. Da $\overline{X}_k f$ sicher primitiv ist, so ist jene Gruppe von Berührungstransformationen irreducibel.[1]) Aber eine 10-gliedrige reelle irreducible Gruppe von Berührungstransformationen ist immer durch eine reelle Berührungstransformation ähnlich mit der Gruppe[2])

$$p, \; q + xr, \; r, \; xq + \tfrac{1}{2}x^2 r, \; xp - yq, \; yp + \tfrac{1}{2}y^2 r, \; xp + yq + 2zr,$$

$$(z - xy)p - \tfrac{1}{2}y^2 q - \tfrac{1}{2}xy^2 r, \; \tfrac{1}{2}x^2 p + zq + xzr,$$

$$(xz - \tfrac{1}{2}x^2 y)p + (yz - \tfrac{1}{2}xy^2)q + (z^2 - \tfrac{1}{4}x^2 y^2)r.$$

Wir können also auch sagen, dass unsere ursprüngliche Gruppe $\overline{X}_k f$ durch eine reelle Punkttransformation mit der eben angegebenen Gruppe, aufgefasst als Gruppe von Punkttransformationen, ähnlich ist. Diese lässt sich aber durch die reelle Punkttransformation[3])

$$x_1 = x, \; z_1 = z - \tfrac{1}{2}xy, \; y_1 = \tfrac{1}{2}y$$

auf die bekannte Normalform der projectiven Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes

1) Vgl. Transformationsgruppen, II. S. 394.
2) Transformationsgruppen, III. S. 384.
3) Vgl. Transformationsgruppen, II. S. 445.

$$p - yr,\ q + xr,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr,$$
$$zp - yU,\ zq + xU,\ zU$$

bringen.

Damit ist gezeigt, dass jede reelle Gruppe, die mit der eben geschriebenen überhaupt ähnlich ist, auch durch eine reelle Punkttransformation mit ihr ähnlich ist.

Wir können also unsere Gruppe $X_k f$ in reeller Weise auf die Form bringen, die wir schon früher betrachtet haben, nämlich:

$$\begin{aligned}
X_1 f &= p - yr + \varphi_1(x, y, z, w)\frac{\partial f}{\partial w} \\
X_2 f &= q + xr + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_3 f &= r + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_4 f &= xq + \varphi_4 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_5 f &= xp - yq + \varphi_5 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_6 f &= yp + \varphi_5 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_7 f &= xp + yq + 2zr + \varphi_6 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_8 f &= zp - yU + \varphi_8 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_9 f &= zq + xU + \varphi_9 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_{10} f &= zU + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Die φ_k sind jetzt aber reelle Functionen. Die Rechnungen werden trotzdem ganz dieselben wie früher. Zunächst bilden die Gleichungen

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad X_3 f = 0$$

ein vollständiges System, dessen Lösung reell gewählt werden kann und an Stelle von w als neue Veränderliche eingeführt werden darf. Dann zeigt sich weiter, dass φ_4, φ_5, φ_6, φ_7 nur von w abhängen, und man kann ebenso wie früher beweisen, dass $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$ sein muss. Durch eine reelle Transformation kann man dann $\varphi_7 = 1$ machen, und die übrigen

Rechnungen werden genau dieselben wie früher. Man gelangt zu der schon früher gefundenen Gruppe, die wir in der Form 3′ schreiben:

$$\text{VII.}\quad \boxed{\begin{array}{c} p_1 - x_2p_3,\ p_2 + x_1p_3,\ p_3,\ x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_2p_1, \\ x_3p_3 + U,\ x_3p_1 - x_2U,\ x_3p_2 + x_1U,\ x_3U. \\ (U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) \end{array}}$$

Zweiter Fall. $\overline{X}_kf$ ist ähnlich mit der conformen Gruppe. Hier können wir uns wieder auf ein Theorem von Lie[1]) berufen, aus welchem zu entnehmen ist, dass $\overline{X}_kf$ in reeller Weise in eine der beiden folgenden Gruppen übergeführt werden kann:

1. $$p,\ q,\ r,\ U,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr,$$
$$2xU - Sp,\ 2yU - Sq,\ 2zU - Sr.$$

2. $$p,\ q,\ r,\ U,\ xq - yp,\ yr + zq,\ zp + xr,$$
$$2xU - (x^2 + y^2 - z^2)p,\ 2yU - (x^2 + y^2 - z^2)q,$$
$$2zU + (x^2 + y^2 - z^2)r.$$

Den ersten Fall haben wir schon früher behandelt. Wenn die damals mit φ_k bezeichneten Functionen reell sind, so werden alle ausgeführten Variablenänderungen reell oder können wenigstens so eingerichtet werden. Der Beweis, dass $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$ sein muss, ergiebt sich für reelle φ direct daraus, dass diese Functionen die Gleichung

$$\varphi_4^2 + \varphi_5^2 + \varphi_6^2 = 0$$

erfüllen. Sonst bleiben alle Rechnungen genau dieselben. Man kommt auf die mit 4 (oder 4′) bezeichnete Gruppe, die wir in der Form 4′ hier schreiben wollen:

$$\text{VIII.}\quad \boxed{\begin{array}{c} p_1,\ p_2,\ p_3,\ x_1p_2 - x_2p_1,\ x_2p_3 - x_3p_2,\ x_3p_1 - x_1p_3,\ U, \\ 2x_1U - Sp_1,\ 2x_2U - Sp_2,\ 2x_3U - Sp_3. \\ (U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4,\ S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{array}}$$

Es bleibt jetzt nur noch der Fall zu erledigen, wo $\overline{X}_kf$ die Form 2 hat. Dann lässt sich die Gruppe X_kf, indem wir gleich die Lösung des vollständigen Systems

---

1) Transformationsgruppen, III. S. 391.

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad X_3 f = 0,$$

welche wir reell wählen können, an Stelle von w als neue Veränderliche einführen, so schreiben (wo die φ_k reell sind):

$$\begin{aligned}
X_1 f &= p \\
X_2 f &= q \\
X_3 f &= r \\
X_4 f &= xq \quad - yp + \varphi_4 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_5 f &= yr \quad + zq + \varphi_5 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_6 f &= zp \quad + xr + \varphi_6 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_7 f &= U \quad + \varphi_7 \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_8 f &= 2xU - (x^2 + y^2 - z^2) \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_9 f &= 2yU - (x^2 + y^2 - z^2) \frac{\partial f}{\partial w} \\
X_{10} f &= 2zU - (x^2 + y^2 - z^2) \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Da die Gruppe durch die Transformation $z' = iz$ in die früher untersuchte Form übergeht, so kann man schliessen, dass auch hier $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$ sein wird. Da $\varphi_7 \neq 0$ ist, so können wir durch die reelle Transformation $w' = \int \frac{dw}{\varphi_7(w)}$ erreichen, dass $\varphi_7 = 1$ wird (dass φ_7 nur von w abhängt, ergiebt sich wie früher). Es ist dann, wenn wir statt w' wieder w schreiben,

$$X_7 f = U + \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Die Klammerrelationen

$$\begin{aligned}
(X_1 X_8) &= 2X_7, & (X_2 X_8) &= 2X_4, & (X_3 X_8) &= 2X_6, \\
(X_1 X_9) &= -2X_4, & (X_2 X_9) &= 2X_7, & (X_3 X_9) &= 2X_5, \\
(X_1 X_{10}) &= 2X_6, & (X_2 X_{10}) &= 2X_5, & (X_3 X_{10}) &= 2X_7
\end{aligned}$$

ergeben:

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial \varphi_8}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_8}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_9}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_9}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial \varphi_9}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial z} = 2,$$

woraus folgt, dass

$$\varphi_8 = 2x + \alpha(w), \quad \varphi_9 = 2y + \beta(w), \quad \varphi_{10} = 2z + \gamma(w)$$

ist. Aber aus

$$(X_4 X_8) = - X_9, \quad (X_4 X_9) = X_8, \quad (X_6 X_8) = X_{10}$$

folgt sofort, dass $\alpha(w) = \beta(w) = \gamma(w) = 0$ ist.

Unsere Gruppe nimmt, wenn wir noch e^w als neues w einführen, die folgende Gestalt an (wobei wir die Variablen mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet haben):

IX.

$$\boxed{\begin{gathered} p_1, p_2, p_3, x_1 p_2 - x_2 p_1, x_2 p_3 + x_3 p_2, x_3 p_1 + x_1 p_3, \\ U, 2x_1 U - (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) p_1, 2x_2 U - (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) p_2, \\ 2x_3 U + (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) p_3. \\ U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) \end{gathered}}$$

Damit sind nun auch alle reellen Gruppen des vierdimensionalen Raumes bestimmt, bei denen zwei Punkte eine und nur eine, mehr als zwei dagegen keine wesentliche Invariante haben. Alle diese Gruppen sind, wie wir gefunden haben, durch reelle Punkttransformation ähnlich jede mit einem der folgenden neun Typen, deren jedem wir den Ausdruck der Invariante von zwei Punkten beifügen.

I.

$$\boxed{p_i, \; x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, \cdots, 4)}$$

$$J = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

II.

$$\boxed{\begin{gathered} p_1, p_2, p_3, p_4, x_1 p_2 - x_2 p_1, x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3, \\ x_1 p_4 + x_4 p_1, x_2 p_4 + x_4 p_2, x_3 p_4 + x_4 p_3. \end{gathered}}$$

$$J = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 - (x_4 - x_4)^2$$

III. $p_1, p_2, p_3, p_4, x_1p_2 - x_2p_1, x_3p_4 - x_4p_3,$
$x_1p_3 + x_3p_1, x_1p_4 + x_4p_1, x_2p_3 + x_3p_2, x_2p_4 + x_4p_2.$

$$J = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 - (x_4 - y_4)^2$$

IV. $p_i + x_i U, \; x_i p_k - x_k p_i. \quad (i, k = 1, \cdots, 4)$

$$J = \frac{\sum_{1}^{4} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i<k}^{1,\cdots,4} (x_i y_k - x_k p_i)^2}{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 1)^2}$$

V. $p_1 - x_1 U, \; p_2 - x_2 U, \; p_3 - x_3 U, \; p_4 + x_4 U,$
$x_1p_2 - x_2p_1, x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3,$
$x_1p_4 + x_4p_1, x_2p_4 + x_4p_2, x_3p_4 + x_4p_3.$

$$J = \frac{\sum_{1}^{3} (x_i - y_i)^2 - (x_4 - y_4)^2 - \sum_{i<k}^{1,2,3} (x_i y_k - x_k y_i)^2 + \sum_{1}^{3} (x_i y_4 - y_i x_4)^2}{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 - 1)^2}$$

VI. $p_i - x_i U, \; x_i p_k - x_k p_i. \quad (i, k = 1, \cdots, 4)$

$$J = \frac{\sum_{1}^{4} (x_i - y_i)^2 - \sum_{i<k}^{1,\cdots,4} (x_i y_k - x_k y_i)^2}{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 - 1)^2}$$

VII. $p_1 - x_2p_3, \; p_2 + x_1p_3, \; p_3, \; x_1p_2, \; x_1p_1 - x_2p_2, \; x_2p_1,$
$x_3p_3 + U, \; x_3p_1 - x_2U, \; x_3p_2 + x_1U, \; x_3U.$

$$J = \frac{x_3 - y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_4 y_4}$$

VIII. $p_1, p_2, p_3, x_1p_2 - x_2p_1, x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3,$
$U, \; 2x_1U - Sp_1, \; 2x_2U - Sp_2, \; 2x_3U - Sp_3.$

$$J = \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}{x_4 y_4}$$

IX. $\begin{array}{|c|} p_1, p_2, p_3, x_1p_2 - x_2p_1, x_2p_3 + x_3p_2, x_3p_1 + x_1p_3, \\ U, 2x_1U - (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)p_1, 2x_2U - (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)p_2, \\ 2x_3U + (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)p_3. \end{array}$

$$J = \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2}{x_4 y_4}.$$

Hierbei ist $U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$, $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Setzt man bei den Gruppen VII, VIII, IX

$$U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + p_4,$$

so ist bei dieser Schreibweise der Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage. Man erkennt nun, dass die durch ihn hindurchgehenden Linienelemente (dasselbe gilt dann offenbar auch für jeden andern Punkt von allgemeiner Lage) sechsgliedrig transformirt werden, wie bei den Gruppen I, $\cdots$, VI. Es lässt sich nämlich durch keine lineare Combination der infinitesimalen Transformationen (mit constanten Coefficienten) eine infinitesimale Transformation herstellen, die nur Glieder von höherer Ordnung als der ersten enthält. Im dreidimensionalen Raume hat Lie eine Gruppe gefunden, welche zu der in dieser Arbeit behandelten Kategorie gehört, bei welcher aber, wenn man in der Nähe eines Punktes von allgemeiner Lage entwickelt, eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung vorkommt. Helmholtz hat in seiner am Anfang citirten Arbeit bei seinen Rechnungen stillschweigend vorausgesetzt, dass ein solcher Fall nicht eintritt. Durch die erwähnte Gruppe hat Lie gezeigt, dass jene Voraussetzung von Helmholtz unzutreffend ist.

Dies ist aber im vierdimensionalen Raume nicht mehr der Fall. Wir haben vielmehr gesehen, dass im vierdimensionalen Raume Helmholtz mit seiner Voraussetzung keinen Irrthum begangen haben würde.

An die Gruppen, welche wir gefunden haben, lassen sich ähnliche Betrachtungen knüpfen, wie Lie sie im dreidimensionalen Raume durchgeführt hat. Man kann, wie Lie es im dreidimensionalen Raume gethan hat, auch hier die Helmholtzschen Axiome an den Gruppen I, $\cdots$, IX prüfen und untersuchen, ob sie zur Charakterisierung der Gruppen I, IV, VI, um die es sich bei dem Problem der Grundlagen der Geometrie handelt, nothwendig

und hinreichend sind. I, IV, VI sind nämlich die euklidischen und die beiden Schaaren von nichteuklidischen Bewegungen.

Das Resultat ist, ebenso wie Lie es gefunden hat, ein negatives. Es zeigt sich, dass wenigstens eins der Helmholtzschen Axiome, das sogenannte Monodromieaxiom, durchaus überflüssig ist. Wenn man andrerseits die Helmholtzschen Axiome so auffasst, dass sie für specielle Lagen der betreffenden Punkte Ausnahmen gestatten, so findet man, dass sie zur Charakterisirung jener drei Gruppen nicht hinreichen, selbst wenn man das Monodromieaxiom hinzunimmt. Die Gruppe VIII erfüllt nämlich das Monodromieaxiom auch und genügt den übrigen Helmholtzschen Axiomen wenigstens im allgemeinen. Aber auf eine nähere Auseinandersetzung hierüber gehen wir deshalb nicht ein, weil sich ausser dem, was Lie im dreidimensionalen Raum bemerkt hat, nichts wesentlich Neues darbietet.

Wir wollen nunmehr das Problem, welches für den vierdimensionalen Raum vollständig erledigt ist, im fünfdimensionalen Raum wenigstens theilweise behandeln. Dabei nehmen wir auf Realitätsverhältnisse keine Rücksicht und beschränken uns überdies auf imprimitive Gruppen.

Dritter Abschnitt.

Die imprimitiven Gruppen des fünfdimensionalen Raumes, bei welchen zwei Punkte eine und nur eine, mehr als zwei dagegen keine wesentliche Invariante haben.

Schon früher haben wir bemerkt, dass in mehr als dreidimensionalen Räumen bei den Gruppen, welche wir suchen, keine derartige Imprimitivität einteten kann, dass eine Schaar von ∞^1 $(n-1)$-dimensionalen oder eine Schaar von ∞^2 $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten invariant bleibt. Es kann also im fünfdimensionalen Raum bei den von uns gesuchten Gruppen nur insofern Imprimitivität stattfinden, als eine Schaar von ∞^3 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten oder eine solche von ∞^4 eindimensionalen Mannigfaltigkeiten invariant bleibt. Im ersteren Falle kann man durch eine geeignete Variablenänderung erreichen, dass die invariante Schaar durch

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

dargestellt wird. Die Gruppe, welche nach Satz 1 15-gliedrig ist, hat dann folgendes Aussehen:

$$X_k f = \xi_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+ \sigma_k \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_k \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (k = 1, \cdots, 15)$$

Die verkürzte Gruppe

$$\overline{X}_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z}$$

ist nothwendig primitiv, da man sonst auf einen der beiden bereits ausgeschlossenen Fälle zurückkäme. Sie ist offenbar höchstens 15-gliedrig, aber wenigstens 12-gliedrig. Wäre sie nämlich weniger als 12-gliedrig, so könnte man es so einrichten, dass bei vier infinitesimalen Transformationen die Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ fehlen. Dann würden aber in ihrer Matrix alle dreireihigen Determinanten verschwinden, was dem Satz 4 (für $m = 2$) widerspricht. In dem Verzeichniss aller Typen von primitiven Gruppen in x, y, z[1]) findet man keine 13- und keine 14-gliedrigen Gruppen, an 12- und 15-gliedrigen aber nur die beiden folgenden:

1) die allgemeine lineare
2) die allgemeine projective Gruppe.

Ersetzen wir die Variablen x, y, z durch x_1, x_2, x_3, so liesse sich die Gruppe $X_k f$ im ersten Falle so schreiben:

$$p_i + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_i \frac{\partial f}{\partial v}, \; x_k p_i + \sigma_{ki} \frac{\partial f}{\partial v} + \tau_{ki} \frac{\partial f}{\partial u}, \; \varphi_k \frac{\partial f}{\partial u} + \psi_k \frac{\partial f}{\partial v}.$$
$$(i, k = 1, 2, 3)$$

Lässt man hier nur k variiren, so hat man sieben infinitesimale Transformationen, in denen nur $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ vorkommen, in deren Matrix also alle vierreihigen Determinanten verschwinden. Das widerspricht aber dem Satz 4 (für $m = 3$). Der erste Fall ist also ausgeschlossen.

Im zweiten Falle können wir die Gruppe so schreiben:

$$p_i + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_i \frac{\partial f}{\partial v},$$
$$x_k p_i + \sigma_{ki} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{ki} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$
$$x_k(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \varphi_k \frac{\partial f}{\partial u} + \psi_k \frac{\partial f}{\partial v}.$$

1) Transformationsgruppen, III. S. 139.

Wir können offenbar die beiden Lösungen des vollständigen Systems

$$p_i + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_i \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

die hinsichtlich u, v voneinander unabhängig sind, an Stelle von u, v als neue Veränderliche einführen, wodurch $\sigma_i = \tau_i = 0$ wird, sonst aber die Form der Gruppe ungeändert bleibt.

Wir nehmen also von vorneherein die Gruppe in der Gestalt an:

$$p_i, \; x_k p_i + \sigma_{ki} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{ki} \frac{\partial f}{\partial v}, \; x_k(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)$$
$$+ \varphi_k \frac{\partial f}{\partial u} + \psi_k \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Offenbar sind σ_{ki}, τ_{ki} nur Functionen von u, v.

Betrachtet man die beiden infinitesimalen Transformationen

$$x_1 p_1 + \sigma_{1,1} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{1,1} \frac{\partial f}{\partial v}, \; x_2 p_2 + \sigma_{2,2} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{2,2} \frac{\partial f}{\partial v},$$

so lassen sich, da

$$\left(\sigma_{11} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{11} \frac{\partial f}{\partial v}, \; \sigma_{22} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{22} \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

ist, zwei solche Functionen von u, v als neue u, v einführen, dass die beiden infinitesimalen Transformationen die eine der beiden folgenden Formen annehmen:

$$1) \qquad x_1 p_1 + \frac{\partial f}{\partial u}, \quad x_2 p_2 + v \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$2) \qquad x_1 p_1 + \frac{\partial f}{\partial u}, \quad x_2 p_2 + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Im ersten Falle würde man durch Combination mit

$$x_2 p_1 + \sigma_{21} \frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{21} \frac{\partial f}{\partial v}$$

finden:

$$\frac{\partial \sigma_{2,1}}{\partial u} = -\sigma_{2,1}, \; \frac{\partial \tau_{2,1}}{\partial u} = -\tau_{21}, \; v \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial u} - \tau_{21} = \sigma_{21},$$
$$v \frac{\partial \tau_{21}}{\partial u} = \tau_{21}.$$

Daraus ergiebt sich aber $\sigma_{21} = \tau_{21} = 0$, und wir hätten in unserer Gruppe die beiden infinitesimalen Transformationen p_1 und $x_2 p_1$, welche dieselben Bahncurven haben. Das müssen

wir aber ausschliessen. Es bleibt also nur die zweite Möglicheit, wo die beiden infinitesimalen Transformationen sich auf die Form 2) bringen lassen. Durch Klammeroperationen findet man, dass die Ausdrücke

$$X_{ki}f = x_k p_i + \sigma_{ki}\frac{\partial f}{\partial u} + \tau_{ki}\frac{\partial f}{\partial v}$$

so aussehen:

$$x_1p_1 + \frac{\partial f}{\partial u},\; x_2p_1 + a e^{v-u}\frac{\partial f}{\partial v},\; x_3p_1 + a e^{-u}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

$$x_1p_2 + \frac{1}{a}e^{u-v}\frac{\partial f}{\partial u},\; x_2p_2 + \frac{\partial f}{\partial v},\; x_3p_2 + e^{-v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

$$x_1p_3 - \frac{1}{a}e^{u}\frac{\partial f}{\partial u},\; x_2p_3 - e^{v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right),\; x_3p_3 - \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Dabei ist a eine von Null verschiedene Constante.

Jetzt können wir leicht fünf infinitesimale Transformationen bilden, die den Anfangspunkt, der ein Punkt von allgemeiner Lage ist, in Ruhe lassen, z. B.

$$X_{21} - aX_{22} = x_2p_1 - ax_2p_2 + a(e^{v-u} - 1)\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$X_{31} - a(X_{11} + X_{22}) = (x_3 - ax_1)p_1 - ax_2p_2 + a(e^{-u} - 1)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$X_{32} - X_{11} - X_{22} = -x_1p_1 + (x_3 - x_2)p_2 + (e^{-v} - 1)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$X_{23} + X_{11} + X_{22} = x_1p_1 + x_2p_2 + x_2p_3 - (e^{v} - 1)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3.$$

Nach Satz 2 müsste ihre Determinante identisch verschwinden, d. h. es müsste sein:

$$\begin{vmatrix} x_2, & -ax_2, & 0, & 0, & a(e^{v-u} - 1) \\ x_3 - ax_1, & -ax_2, & 0, & a(e^{-u} - 1), & a(e^{-u} - 1) \\ -x_1, & x_3 - x_2, & 0, & e^{-v} - 1, & e^{-v} - 1 \\ x_1, & x_2, & x_2, & -(e^{v} - 1), & -(e^{v} - 1) \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass das nicht der Fall ist.

Wir können demnach sagen:

Im fünfdimensionalen Raum giebt es unter den von uns gesuchten Gruppen keine, welche in der Weise imprimitiv ist, dass bei ihr eine Schaar von ∞^3 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten invariant bleibt.

Allgemein gilt der Satz, dass im n-dimensionalen Raume für $n \geqq 5$ bei keiner Gruppe, wie wir sie suchen, eine invariante Schaar von ∞^3 $(n-3)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten existirt.

Es bleibt jetzt nur noch der Fall zu erledigen, wo eine Schaar von ∞^4 Curven invariant bleibt, die wir nach einer geeigneten Wahl der Coordinaten durch $x_1 =$ Const., $x_2 =$ Const., $x_3 =$ Const., $x_4 =$ Const. darstellen können. Diese Curvenschaar wird dann durch eine primitive Gruppe (in $x_1, \cdots, x_4$) transformirt, welche höchstens 15- und wenigstens 14-gliedrig ist, da es sonst in der Gruppe zwei infinitesimale Transformatioen mit denselben Bahncurven gäbe. In der früher citirten Arbeit von Page findet man an 14- und 15-gliedrigen primitiven Gruppen nur drei, nämlich:

1) $p_k,\ x_4p_1 - x_2p_3,\ x_4p_2 + x_1p_3,\ x_4p_3,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_2p_1,$ $x_1p_2,\ x_3p_1 + x_2p_4,\ x_3p_2 - x_1p_4,\ x_3p_4,\ x_3p_3 - x_4p_4,\ x_1p_1 + x_2p_2$ $+ x_3p_3 + x_4p_4.$ (15-gliedrig.)

Diese Gruppe führt aber zu keinem für uns brauchbaren Resultat. In der That, bezeichnen wir ihre infinitesimalen Transformationen in der obenstehenden Reihenfolge mit

$$\overline{X}_1 f,\ \overline{X}_2 f,\ \cdots,\ \overline{X}_{15} f,$$

so haben wir zu untersuchen, ob eine Gruppe von der Form

$$X_k f = \overline{X}_k f + \varphi_k \frac{\partial f}{\partial x_5} \quad (k = 1, \cdots, 15)$$

zu den von uns gesuchten gehören kann. Combinirt man aber $X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f,\ X_4 f$ mit allen übrigen $X_k f$, so ergiebt sich immer ein Resultat von der Form

$$\text{Const. } X_1 f + \text{Const. } X_2 f + \text{Const. } X_3 f + \text{Const. } X_4 f.$$

Hat man also in der bekannten Weise erreicht, dass

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$$

ist, so ergiebt sich, dass alle φ_k nur von x_5 abhängen. Dann wäre $x_5 =$ Const. eine invariante Schaar von ∞^1 vierdimensionalen

Mannigfaltigkeiten. Eine solche darf es aber, wie wir früher gezeigt haben, nicht geben.

2) Die conforme Gruppe

$$p_i,\ x_ip_k - x_kp_i,\ U,\ 2x_iU - p_i\sum_1^4{}^i x_i^2 \quad (k,\ i = 1,\ \cdots,\ 4),$$

$$(U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4).$$

Durch Rechnungen, die ganz analog denjenigen sind, welche wir früher für die conforme Gruppe des dreidimensionalen Raumes durchgeführt haben, gelangt man hier zu dem Ergebniss:

$$p_i,\ x_ip_k - x_kp_i,\ U,\ 2x_iU - p_i\sum_1^4{}^i x_i^2. \quad (i,\ k = 1,\ \cdots,\ 4),$$

$$(U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5)$$

Die Invariante von zwei Punkten lautet:

$$J = \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2}{x_5y_5}.$$

Die Analogie dieser Gruppe mit der Gruppe VIII im vierdimensionalen Raum ist unverkennbar. Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes:

Aus der $\frac{n(n+1)}{2}$-gliedrigen conformen Gruppe des $n - 1$)-dimensionalen Raumes

$$p_i,\ x_ip_k - x_kp_i,\ U,\ 2x_iU - p_i\sum_1^{n-1}{}^i x_i^2. \quad (i,\ k = 1,\ \cdots,\ n-1),$$

$$(U = x_1p_1 + \cdots + x_{n-1}p_{n-1})$$

erhält man eine Gruppe des n-dimensionalen Raumes, bei der zwei Punkte eine und nur eine, dagegen mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben, indem man einfach U durch $U + x_np_n$ ersetzt. Die Invariante von zwei Punkten ist

$$J = \frac{\sum_1^{n-1}{}^i (x_i - y_i)^2}{x_n \cdot y_n}.$$

Der Zähler ist die Invariante von zwei Punkten bei der Gruppe der euklidischen Bewegungen des ($n - 1$)-dimensionalen Raumes.

3) Es giebt noch eine 14-gliedrige primitive Gruppe in x_1, x_2, x_3, x_4, die wir (etwas anders als Page) so schreiben:

$$p_k,\ x_4p_1 + x_2p_3,\ x_4p_2 - x_1p_3,\ x_4p_3,\ x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2,$$
$$x_2p_1,\ x_3p_1 - x_2p_4,\ x_3p_2 + x_1p_4,\ x_3p_4,\ x_3p_3 - x_4p_4.$$

Wir haben uns jetzt also noch mit Gruppen von Form

$$p_k + \varphi_k p_5,\ x_4p_1 + x_2p_3 + \varphi_5p_5,\ x_4p_2 - x_1p_3 + \varphi_6p_5,$$
$$x_4p_3 + \varphi_7p_5,\ x_1p_2 + \varphi_8p_5,\ x_1p_1 - x_2p_2 + \varphi_9p_5,\ x_2p_1 + \varphi_{10}p_5,$$
$$x_3p_1 - x_2p_4 + \varphi_{11}p_5,\ x_3p_2 + x_1p_4 + \varphi_{12}p_5,\ x_3p_4 + \varphi_{13}p_5,$$
$$x_3p_3 - x_4p_4 + \varphi_{14}p_5,\ \varphi_{15}p_5$$

zu beschäftigen. Der Anfangspunkt sei so gewählt, dass für ihn $\varphi_{15} \neq 0$ ist. Dann ist er offenbar ein Punkt von allgemeiner Lage. Durch Addition eines passenden Ausdrucks von der Form Const. $X_{15}f$ lässt es sich erreichen, dass $X_5f, \cdots, X_{14}f$ den Anfangspunkt in Ruhe lassen. Sie bilden dann für sich eine Gruppe, deren Zusammensetzung gegeben ist.

Die Gleichungen

$$x_1p_2 + \varphi_8p_5 = 0,\ x_1p_1 - x_2p_2 + \varphi_9p_5 = 0,$$
$$x_3p_4 + \varphi_{13}p_5 = 0,\ x_3p_3 - x_4p_4 + \varphi_{14}p_5 = 0$$

bilden ein vollständiges System.

Da die zu p_1, p_2, p_3, p_4 gehörige Determinante nicht verschwindet, so enthält die Lösung des vollständigen Systems wirklich die Variable x_5. Wir können sie uns also als neues x_5 eingeführt denken, wodurch

$$\varphi_8 = \varphi_9 = \varphi_{13} = \varphi_{14} = 0$$

wird. Da nach Satz 2 in der Matrix von $X_5f, \cdots, X_{14}f$ alle fünfreihigen Determinanten identisch verschwinden müssen, so ergiebt sich, dass auch

$$\varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_{10} = \varphi_{11} = \varphi_{12} = 0$$

ist. Combinirt man nun $X_5f, \cdots, X_{14}f$ mit $X_{15}f$, so findet man, dass φ_{15} nur von x_5 abhängt. Wir können aber, ohne dass die $X_5f, \cdots, X_{14}f$ sich ändern, $\int \frac{dx_5}{\varphi_{15}}$ als neues x_5 einführen und erreichen dadurch, dass $X_{15}f = p_5$ wird. Die Bestimmung der Functionen $\varphi_1, \cdots, \varphi_4$ hat dann keine Schwierigkeit. Man findet

$$\varphi_1 = -x_2,\ \varphi_2 = x_1,\ \varphi_3 = -x_4,\ \varphi_4 = x_3.$$

Die Gruppe, auf welche wir gekommen sind, ist also:

$$p_1 - x_2p_5,\ p_2 + x_1p_5,\ p_3 - x_4p_5,\ p_4 + x_3p_5,\ p_5,\ x_4p_1 + x_2p_3,$$
$$x_4p_2 - x_1p_3,\ x_4p_3,\ x_1p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2,\ x_2p_1,\ x_3p_1 - x_2p_4,$$
$$x_3p_2 + x_1p_4,\ x_3p_4,\ x_3p_3 - x_4p_4.$$

Die Invariante von zwei Punkten ist hier

$$J = x_5 - y_5 + x_2y_1 - x_1y_2 + x_4y_3 - x_3y_4.$$

Eine analoge Gruppe giebt es, wie man sich leicht überzeugt, in jedem Raum von ungerader Dimensionenzahl. Im $(2n+1)$-dimensionalen Raum lautet die Invariante von zwei Punkten bei dieser Gruppe

$$J = x_{2n+1} - y_{2n+1} + \sum_1^n {}^m (x_{2m}y_{2m-1} - x_{2m-1}y_{2m}).$$

Im dreidimensionalen Raum ist es die Gruppe, welche Lie[1]) in seiner Tabelle mit (10) bezeichnet.

Geht man vom $(2n+1)$- zum $(2n+2)$-dimensionalen Raum über, so findet man eine Gruppe, welche durchaus analog ist mit der von uns im vierdimensionalen Raum gefundenen Gruppe 3′. Sie steht überdies in enger Beziehung zu der oben bezeichneten Gruppe des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes. Die Invariante, welche zwei Punkte bei ihr haben, lautet nämlich:

$$J = \frac{x_{2n+1} - y_{2n+1} + \sum_1^n {}^m (x_{2m}y_{2m-1} - x_{2m-1}y_{2m})}{x_{2n+2} \cdot y_{2n+2}}.$$

Der Zähler ist die Invariante zweier Punkte bei der erwähnten Gruppe des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes.

Es giebt also von solchen Gruppen, wie wir sie suchen, in einem beliebigen Raume sicher zwei imprimitive, nämlich die Gruppe

$$p_i,\ x_ip_k - x_kp_i,\ U,\ 2x_iU - p_i\sum_1^{n-1}{}^i x_i^2.$$

$$(i, k = 1, \cdots, n-1;\ U = \sum_1^n {}^i x_ip_i)$$

1) Transformationsgruppen, III. S. 434.

und eine der beiden zuletzt erwähnten Gruppen, für welche wir nur die Form der Invariante von zwei Punkten angegeben haben. Unsere Untersuchung hat für den vierdimensionalen und fünfdimensionalen Raum ergeben, dass es ausserdem keine imprimitiven Gruppen mit der verlangten Eigenschaft giebt, was im dreidimensionalen Raume nicht der Fall ist. Wie sich in dieser Beziehung die mehr als fünfdimensionalen Räume verhalten, muss dahingestellt bleiben.

Vita.

Ich, Gerhard Waldemar Hermann Kowalewski, bin geboren am 27. März 1876 in Alt-Järshagen in der preufsischen Provinz Pommern. Meine Schulbildung erhielt ich auf dem Progymnasium zu Löbau in Westpreufsen und dem Königlichen Gymnasium zu Graudenz. Nach Absolvierung des Abiturientenexamens studierte ich zuerst fünf Semester in Königsberg, darauf zwei Semester in Greifswald und zwei Semester in Leipzig Mathematik, Physik und Philosophie. Vorlesungen hörte ich bei folgenden Herren: In Königsberg bei F. Cohn, Eberhard, Franz, Gercke, D. Hilbert, Minkowski, Peters, Rahts, Thiele, Volkmann, Walter; in Greifswald bei Limpricht, Rehmke, Richarz, Schuppe, Thomé; in Leipzig bei Engel, Lie.




NOV 17
MAR 16 1978
FOR USE IN
BUILDING


Math 4508.98.8
Uber eine kategorie
Cabot Science
3 2044 09